

Bemerkungen zur letzten Arbeit von M. Smoluchowski

Von

E. Hlawka

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 21. Juni 2001
durch das w. M. Edmund Hlawka)

Die Arbeit [8] aus dem Nachlaß des berühmten Physikers Smoluchowski ist eine seiner ideenreichsten Arbeiten. Auf diese Arbeit, die nicht leicht zugänglich ist, hat mich Prof. O. Preining aufmerksam gemacht, wofür ich ihm herzlich danke. Ich will aber nicht auf die in dieser Arbeit entwickelte Theorie des Zufalls eingehen, in der auch die Theorie der willkürlichen Funktionen von Poincaré¹ erwähnt und als geregelter Zufall bezeichnet wird, sondern einige Beispiele seiner Arbeit besprechen, z.B. die Lissajouschen Figuren.

*

Als einfachstes Beispiel betrachtet Smoluchowski die Funktion

$$y = \sin \frac{x}{a} \quad (1)$$

und schreibt auf Seite 97: „Setzen wir voraus, daß a im Wert klein ist im Vergleich zur Schwankungsbreite der „Ursache“ x , so wird auch $\Delta x = 2\pi a$ sehr klein und es resultiert für die „Wirkung“ y eine von

¹ Vgl. [4].

der Wahrscheinlichkeit des x weitgehend unabhängige Häufigkeitsverteilung

$$w(y)dy = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy. \quad (2)$$

Ich habe nun in der Arbeit [2] einen anderen Zugang zu der oben genannten Verteilung gefunden.

Es sei $\omega = (x_k)$ eine in $E = \langle 0, 1 \rangle$ gleichverteilte Folge im Sinne von Hermann Weyl, d.h. für jede im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion G auf E ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N G(x_k) = \int_0^1 G(x) dx. \quad (3)$$

Ein Beispiel ist $(n\gamma - [n\gamma])$, wo γ irrational ist ($[]$ Gaußklammer).

Ist G sogar von beschränkter Variation $V(G)$, dann gilt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N G(x_k) - \int_0^1 G(x) dx \right| \leq V(G) D_N(\omega), \quad (4)$$

wo D_N die Diskrepanz von G ist (siehe [3] und [6]).

Es sei nun f eine stetige periodische Funktion mit der Periode 1 auf der Zahlengeraden R . Weiters sei

$$\alpha = \min_E f, \quad \beta = \max_E f \quad (5)$$

und sei F eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion auf dem Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, so bilden wir uns die Funktion G , wo

$$G(x) = F(f(x)) \quad (6)$$

ist. Es gilt dann (3) bzw. (4). Nehmen wir jetzt die Funktion

$$y = f(x) = \sin 2\pi x \quad (7)$$

und betrachten die Intervalle von E , wo die Sinusfunktion monoton wachsend bzw. abnehmend ist. Es ist das Intervall $\langle 0, \frac{1}{4} \rangle$, wo y monoton wachsend das Intervall (Bild) $\langle 0, 1 \rangle$ durchläuft, dann das Intervall $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle$, wo es abnehmend das Bild $\langle 0, 1 \rangle$ durchläuft. In $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle$ geht es weiter fallend von 0 bis -1 und dann im Intervall $\langle \frac{3}{4}, 1 \rangle$ wird das Bild $\langle -1, 0 \rangle$ wieder wachsend durchlaufen. In jedem dieser Intervalle, welche disjunkt sind, besitzt y die inverse Funktion

zu x mit der Ableitung $\pm \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ je nach dem Wachstum und es wird

$$\int_0^1 F(\sin 2\pi x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{F(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \frac{F(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_{-1}^0 \frac{F(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_{-1}^0 \frac{F(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \right).$$

Es ist also

$$\int_0^1 F(\sin 2\pi x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy. \quad (8)$$

Wir haben, wenn $\omega = (x_n)$ eine gleichverteilte Folge ist,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F(\sin 2\pi x_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

und es gilt sogar

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F(\sin 2\pi x_k) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \right| \leq CD_N,$$

wo

$$C = V(F(\sin 2\pi x)),$$

wenn die Variation V vorhanden ist.

Ein Beispiel ist $x_n = \frac{n}{2\pi}$, dann ist $\sin 2\pi x_n = \sin n$, vgl. (1) mit $a = 1$.

Man sieht gleich, wie die Verallgemeinerung aussieht: Läßt sich E in endlich viele Intervalle $\langle \rho_j, \sigma_j \rangle$ zerlegen, so daß die offenen Intervalle $\langle \rho_j, \sigma_j \rangle$ disjunkt sind,² also f dort monoton (wachsend oder abnehmend) ist, das Bild von f in $\langle \rho_j, \sigma_j \rangle$ genau $\langle \alpha, \beta \rangle$ und die zugehörige Umkehrfunktion g_j differenzierbar ist.

Es ist

$$g'_j(y) = \frac{1}{f'(g_j)} = \tau_j(y).$$

² Im obigen Intervall sind die Intervalle an den Enden ($\langle 0, \frac{1}{4} \rangle$ und $\langle \frac{3}{4}, 1 \rangle$) modulo 1 zu nehmen (wie im Sinus-Beispiel).

Es wird dann

$$\int_0^1 F(f(x))dx = \int_\alpha^\beta F(y) \left(\sum_{j=1}^s \tau_j(y) \right) dy,$$

wo

$$\tau_j(y) = |g'_j(y)|.$$

Es ist dann $(f(x_n))$ gleichverteilt in $\langle \alpha, \beta \rangle$ mit der Dichte $\tau(y) = \sigma_j(y)$ im Intervall $\langle \rho_j, \sigma_j \rangle$.

Wir können nun alles übertragen. Es sei jetzt $\omega = (x_n) = (x_{n1}, \dots, x_{ns})$ eine s -dimensionale gleichverteilte Folge in E^s , dann gilt für jede integrierbare Funktion G auf E^s die Gleichung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G(x_n) = \int_{E^s} G(x) dx, \quad (3')$$

wo $dx = dx_1 \cdots dx_s$ ist. Es gilt analog wie vorher für $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_s(x_s))$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(f(x_n)) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots \int_{\alpha_s}^{\beta_s} F(f(x)) dx,$$

wo

$$\alpha_j = \min f_j(\xi), \quad \beta_j = \max f_j(\xi)$$

auf $0 \leq \xi < 1$ ist.

Nehmen wir als Beispiel

$$f_j(\xi) = \sin 2\pi\xi$$

für alle j , dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(\sin 2\pi x_{n1}, \dots, \sin 2\pi x_{ns}) \\ = \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(\sin 2\pi x_1, \dots, \sin 2\pi x_s) dx_1 \cdots dx_s. \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die inverse Funktion zu $\sin 2\pi x_j$, dann brauchen wir nur die x_j -Intervalle $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$ in Teilintervalle (ρ_{kj}, σ_{kj}) zu zerlegen. Nachdem die Funktionen f_j alle einander gleich und gleich $\sin 2\pi x$

sind, können wir den eindimensionalen Fall (7) übernehmen und erhalten für das Integral

$$\frac{1}{\pi^s} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \frac{F(y_1, \dots, y_s)}{\sqrt{1-y_1^2} \cdots \sqrt{1-y_s^2}} dy_1 \cdots dy_s.$$

Wir haben also z.B. für $s=2$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(\sin 2\pi x_{n1}, \sin 2\pi x_{n2}) \\ = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{F(y_1, y_2)}{\sqrt{1-y_1^2} \sqrt{1-y_2^2}} dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (*)$$

wobei (x_{n1}, x_{n2}) eine gleichverteilte Folge auf E^2 ist.

Wir können z.B. die Folge $(n\alpha, n\beta)$ nehmen, wo α, β linear unabhängig im Sinne der Gleichverteilung, also $\alpha, \beta, 1$ unabhängig sind. D.h. aus einer Gleichung

$$k\alpha + l\beta + m = 0,$$

wo k, l, m ganze Zahlen sind, folgt $k=l=m=0$. Will man noch die Diskrepanz der Folge ins Spiel bringen, so gilt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N -\text{Integral} \right| \leq V(F) D_N(\omega),$$

wo $V(F)$ die Variation von F im Sinne von Hardy-Krause und D_N die Diskrepanz der Folge ist.

Eine leichte Verallgemeinerung: Es sei

$$f_m(x_j) = J_m \sin 2\pi \xi_m, \quad m = 1, \dots, s$$

wobei $J_m > 0$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(J_1 \sin 2\pi x_1, \dots, J_s \sin 2\pi x_s) dx_1 \cdots dx_s \\ = \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \frac{F(J_1 \xi_1, \dots, J_s \xi_s)}{\sqrt{1-\xi_1^2} \cdots \sqrt{1-\xi_s^2}} \\ = \frac{1}{\pi^s} \int_{-J_1}^{J_1} \cdots \int_{-J_s}^{J_s} \frac{F(y_1, \dots, y_s)}{\sqrt{J_1^2 - y_1^2} \cdots \sqrt{J_s^2 - y_s^2}}. \end{aligned}$$

Für $s=2$ haben wir die Lissajouschen Figuren, die Smoluchowski auch behandelt.

Im allgemeinen Fall teilen wir das j -te Intervall wieder wie im eindimensionalen Fall in Teile $\langle \rho_{kj}, \sigma_{kj} \rangle$, so daß die offenen Intervalle $\langle \rho_{kj}, \sigma_{kj} \rangle$ disjunkt sind, f_j monoton und das Bild von f_j in $\langle \rho_{kj}, \sigma_{kj} \rangle$ genau $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$ ist und die zugehörigen inversen Funktionen g_{kj} differenzierbar sind. Wir setzen wieder

$$g'_{kj}(y) = F'_j(g_{kj}) = \tau_{jk}(y)$$

und es wird

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 F(f(x)) dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_s}^{\beta_s} F(y_1, \dots, y_s) \tau_1(y_1) \dots \tau_s(y_s) dy_1 \dots dy_s,$$

wobei

$$\tau_j(y_j) = \sum_{k=1}^{S(j)} \tau_{jk}(y_j)$$

ist und

$$\tau_{jk}(y_j) = |g'_{jk}(y_j)|$$

ist.

Als weitere Anwendung benützen wir diese Formeln, um Integrale zu behandeln, die in der Arbeit [5] in §3 als Anwendung auf Formeln der speziellen Relativitätstheorie hergeleitet wurden, vor allem die falsch angegebenen Formeln S. 151 unten und S. 152 oben.

Es sei $v = \cos \pi\varphi$, allgemein $v_k = \cos \pi k\varphi$. Wenn γ, δ Zahlen sind mit $\gamma < \delta$, dann ist

$$\cos \pi\gamma > \cos \pi\delta.$$

Es sei f quadrierbar. Wir betrachten dann

$$\frac{1}{N} \sum_{\delta < \cos \pi k\varphi < \gamma} f(\cos \pi k\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{\delta < v_k < \gamma} v_k.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{v_k}{\sqrt{1-v_k^2}} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\cos \pi k\varphi}{\sin \pi k\varphi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \operatorname{ctg} \pi\varphi = \frac{1}{\pi} \operatorname{lg} \sin \pi\varphi \Big|_{\gamma}^{\delta} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{lg} \sqrt{1-v^2} \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{1-v_k^2}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sin \pi k \varphi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \lg \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{2} =$$

$$= \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1 - \cos \pi \varphi}{1 + \sin \pi \varphi}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-v^2}{1+v^2}}$$

$$3) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cos \pi \varphi d\varphi = \sin \pi \varphi = \frac{1}{\pi} \sqrt{1-v^2}$$

$$4) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\varphi = \frac{\varphi}{\pi} \Big|_{\gamma}^{\delta} \quad \text{für } \gamma < v_k < \delta.$$

Betrachten wir den kontinuierlichen Fall der Lissajouschen Figuren, also die Kurve

$$x = x(t) = \cos \alpha t$$

$$y = y(t) = \cos \beta(t - \gamma),$$

wobei

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

eine **irrationale** Zahl ist.

Jetzt wollen wir den zeitlichen Mittelwert einer Funktion

$$\Lambda(g, T) = \frac{1}{T} \int_0^T g(x(t), y(t)) dt$$

heranziehen.

Wir haben nun statt der Weylschen Summen Integrale zu nehmen ($e(x)=e^x$):

$$W(T) = \frac{1}{T} \int_0^T e(2\pi i(h_1 x(t) + h_2 y(t))) dt,$$

wobei h_1, h_2 ganze Zahlen und nicht beide zugleich Null sind (zur Theorie (sogenannte C-Gleichverteilung) vgl. die Arbeit des Verfassers [1]).

Wir stellen sofort fest, daß

$$W(T) = \frac{1}{T} (\alpha h_1 + \beta h_2)$$

und von Null verschieden ist, da γ irrational ist. Wir haben also die C -Gleichverteilung vor uns, d.h. für jede integrierbare Funktion (im Riemannschen Sinne) g gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda(g, T) = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

wobei

$$g(\cos 2\pi\xi, \cos 2\pi\eta) = f(\xi, \eta)$$

gesetzt wurde.

Es ist nach (*)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda(g, T) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_0^1 g(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}} = J.$$

Führt man die sogenannte C -Diskrepanz D_T ein (vgl. wieder [1]), so kann eine quantitative Abschätzung von $|\Lambda(T, g) - J|$ durchgeführt werden, wobei bei der Fehlerabschätzung die feineren arithmetischen Eigenschaften von γ ins Spiel kommen.

Betrachten wir kurz die Keplerbahnen und legen zunächst den Newtonschen Fall zugrunde, so ist bekanntlich die Ellipsenbahn in Polarkoordinaten gegeben durch

$$r = \frac{p}{1 + k \cos 2\pi\varphi}.$$

Es sei nun

$$\frac{\Pi}{\overline{\Pi}} = e^{i\pi\vartheta}, \quad \varphi = l\vartheta$$

(in $\frac{\Pi}{\overline{\Pi}}$ ist Π die Gaußsche Zahl). Wir betrachten

$$r_l = \frac{p}{1 + k \cos 2\pi l\vartheta}$$

und

$$\lambda_N(r) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N r_l,$$

so ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N = \frac{p}{2\pi} \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{p}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Eine Fehlerabschätzung ist leicht zu geben.

Betrachten wir den Fall, daß zur Newtonschen Kraft $\frac{kM}{r^2}$ die Störfunktion

$$\frac{1}{r^3} \frac{C_1}{C_2}$$

hinzutritt (C_1, C_2 Konstante), so wird die zugehörige Differentialgleichung (vgl. z.B. [7], insbesondere S. 198)

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{kM}{C_2} + \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{r},$$

so ist die Lösung bekanntlich

$$r = \left(\frac{kM}{C_2} + A \sin \left(\sqrt{1 - \frac{K_2}{C_2}} \varphi + C_3 \right) \right)^{-1},$$

wo K_2, C_1, C_2, C_3 Konstante sind und wir voraussetzen, daß $\frac{K_2}{C_2} < 1$ ist. Wir setzen

$$\left(\frac{\pi}{\pi} \right)^l = e^{i\pi l \vartheta}$$

und

$$\frac{K_2}{C_2} = \cos \pi l \vartheta = \frac{A_l^2 - B_l^2}{A_l^2 + B_l^2}.$$

Wir erhalten als Bahnkurven die Rosenkurven

$$r_l = \left(\frac{kM}{C_2} + R_l \sin \frac{2A_l B_l}{A_l^2 + B_l^2} \varphi + C_3 \right)^{-1},$$

wo wir statt A jetzt R_l gesetzt haben.

Literatur

- [1] Hlawka, E.: Über C-Gleichverteilung, (Giovanni Sansone zu seinem 70. Geburtstag gewidmet). Ann. Mat. Pura Appl., IV. Serie **49**, 311–326 (1960).
- [2] Hlawka, E.: On some concepts, theorems and problems in the theory of uniform distributions in topics in number theory. Colloq. Math. Societatis János Bolyai, 13. Topics in Number Theory, Debrecen (Hungary) 1974, pp. 97–109.
- [3] Hlawka, E.: Theorie der Gleichverteilung. Bibliograph. Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1979.
- [4] Hlawka, E.: Die Idee der „willkürlichen“ Funktionen von Poincaré im Laufe eines Jahrhunderts. Festband zum 75. Geburtstag von Prof. K.-R. Biermann. Acta historica Leopoldina **27**, 189–200 (1997).

- [5] Hlawka, E.: Pythagorean Tripels. In: Bambah, R. P., Dumir, V. C., Hans-Gill R. J. (eds.) Number Theory, Hindustan Book Agency 1999.
- [6] Kuipers, L., Niederreiter, H.: Uniform Distribution of Sequences. J. Wiley & Sons, New York, 1974.
- [7] Lechner, A.: Enzyklopädie der Mechanik. Verlag Seidel, Wien 1923.
- [8] Smoluchowski, M.: Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze der Physik. Die Naturwissenschaften **17**, 87–110 (1918).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Edmund Hlawka, Margaretenstr. 27/2/9,
1040 Wien.