

Steinersche Torusflächen

Von

W. Schuster

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 19. Juni 1997
durch das w. M. Ludwig Reich)

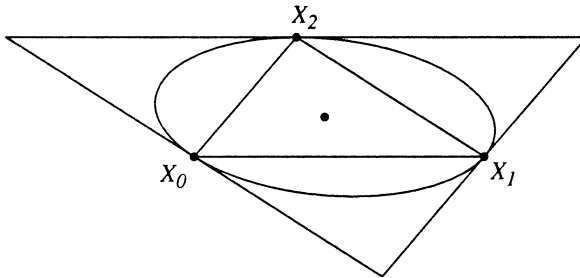
*Herrn Prof. Dr. H. C. Günter Pickert
zum 80. Geburtstag gewidmet*

Einleitung

Durch drei Punkte X_0, X_1, X_2 geht genau eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt dieser Punkte zusammenfällt. Die Tangente an diese Ellipse in einem der Punkte X_0, X_1, X_2 ist parallel zu der Geraden durch die beiden anderen Punkte. Zugleich besitzt diese Ellipse eine Minimaleigenschaft: Unter allen Ellipsen durch die Punkte X_0, X_1, X_2 hat sie den kleinsten Flächeninhalt.

Der Schweizer Mathematiker Jacob Steiner (1796–1863) hat sich zuerst mit den geometrischen Eigenschaften dieser nach ihm benannten Ellipse beschäftigt (vgl. [1]).

Eigenschaften der *Steinerschen Ellipse* finden sich wieder bei einer m -dimensionalen *Torusfläche* $T(\mathbf{X})$, die jedem Polygon $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, $X_j \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, mit *ungerader* Eckenzahl $n = 2m + 1$ auf kanonische Weise zugeordnet ist. Die Eckpunkte X_j von \mathbf{X} liegen auf der Fläche $T(\mathbf{X})$. Diese Zuordnung stiftet die m -dimensionale reelle Liegruppe T_u der orthogonalen zirkulanten (n, n) -Matrizen $A(\mathbf{t})$ mit *ungerader* Zeilenzahl, indem sie als *Transformationsgruppe* auf der Menge der Polygone mit ungerader Eckenzahl wirkt. Die Gruppe T_u ist isomorph zur m -Torusgruppe $e^{2\pi i t_1} \times e^{2\pi i t_2} \times \dots \times e^{2\pi i t_m}$, $t_j \in \mathbb{R}$. Die

Abb. 1. Die Steinersche Ellipse durch die Punkte X_0, X_1, X_2

zu einem Polygon $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{0})$ gehörigen transformierten Polygone $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})\mathbf{X}$, $A(\mathbf{t}) \in T_u$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$, liegen auf der Torusfläche $T(\mathbf{X})$. Jede Komponente $X_k(\mathbf{t})$ von $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ liefert eine *Parameterdarstellung* der Fläche $T(\mathbf{X})$.

Im Falle *gerader* Eckenzahl $n = 2m + 2$ des Polygons \mathbf{X} ist $T(\mathbf{X}) = T^+(\mathbf{X}) \cup T^-(\mathbf{X})$ die Vereinigung zweier zueinander parallelverschobener Torusflächen $T^+(\mathbf{X})$ und $T^-(\mathbf{X})$ mit den Eigenschaften: $T^+(\mathbf{X})$ geht durch die Eckpunkte X_{2k} von \mathbf{X} mit geradem Index und $T^-(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte X_{2k+1} mit ungeradem Index. Die Fläche $T(\mathbf{X})$ wird erzeugt durch die reelle m -Torusgruppe T_g der orthogonalen zirkulanten Matrizen $A(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$, mit *gerader* Zeilenzahl $n = 2m + 2$.

Die transformierten Polygone $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})\mathbf{X}$, $A(\mathbf{t}) \in T_g$, bewegen sich so auf der Fläche $T(\mathbf{X})$, daß die Komponenten (Punkte) $X_{2k}(\mathbf{t})$ mit geradem Index auf die Fläche $T^+(\mathbf{X})$ fallen und die Punkte $X_{2k+1}(\mathbf{t})$ mit ungeradem Index auf die Fläche $T^-(\mathbf{X})$.

Die *Tangentialebene* an die Fläche $T(\mathbf{X})$ im Punkt X_k wird jedesmal aufgespannt von den m Vektoren $X_{k-j} - X_{k+j}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Diese Eigenschaft der Flächen $T(\mathbf{X})$ verallgemeinert also eine Eigenschaft der Steinerschen Ellipse.

Eine *Invariante* der transformierten Polygone $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ ist ihr *Schwerpunkt*. Er fällt mit dem Schwerpunkt von \mathbf{X} zusammen. Weitere Invarianten ergeben sich aus der Orthogonalität der Gruppen T_g und T_u : Bezeichnen wir mit $Q(\mathbf{X})$ die Quadratsumme $X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_{n-1}^2$, dann gilt $Q(\mathbf{X}(\mathbf{t})) = Q(\mathbf{X})$ für jedes transformierte Polygon $\mathbf{X}(\mathbf{t})$. Der Ausdruck Q stellt also ebenfalls eine Invariante bezüglich der Transformationsgruppen T_g und T_u dar. Da zirkulante Matrizen vertauschbar sind, gilt außerdem für *jede* zirkulante reelle (n, n) -Matrix C die Invarianzbeziehung $Q(C\mathbf{X}(\mathbf{t})) = Q(C\mathbf{X})$. Eine Abbildung $\mathbf{X} \rightarrow C\mathbf{X}$ vermöge einer reellen zirkulanten Matrix C kann immer geometrisch interpretiert werden (vgl. [6]). Daher ergeben sich aus dieser Invarianzbeziehung interessante metrische Aussagen. So gilt z.B. für eine Ellipse mit den Halbachsen a

und b : Ist $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$ ein Dreieck auf dieser Ellipse, dessen Schwerpunkt mit ihrem Mittelpunkt zusammenfällt, dann besteht für die Summe der Seitenquadrate die Beziehung $(X_1 - X_0)^2 + (X_2 - X_1)^2 + (X_0 - X_2)^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2)$ (s. Abschnitt 3.1, Satz 2).

Die Gruppe T_n besitzt eine 1-dimensionale *Untergruppe* S . Diese erzeugt eine geschlossene C_∞ -Kurve $S(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte des Polygons \mathbf{X} . Im Falle $n = 3$ ist $S(\mathbf{X})$ die Steinersche Ellipse durch die Eckpunkte des Dreiecks $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$. Die Kurve $S(\mathbf{X})$ stellt daher eine Verallgemeinerung der Steinerschen Ellipse für Polygone mit ungerader Eckenzahl dar. Sie löst zugleich die *Interpolationsaufgabe*, die Eckpunkte eines Polygons \mathbf{X} durch eine unendlich glatte geschlossene Kurve zu verbinden.

Ist $\mathbf{E} = (E_0, E_1, \dots, E_{n-1})$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n , dann ist $S(\mathbf{E})$ eine *Geodätische* auf $T(\mathbf{E})$. Jeder Torus $T(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^d$ ist das Bild $T(\mathbf{X}) = \alpha T(\mathbf{E})$ des *Standardtorus* $T(\mathbf{E})$ unter der linearen Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, die jedem Basisvektor $E_j \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $X_j \in \mathbb{R}^d$ zuordnet. Dabei geht die Geodätische $S(\mathbf{E})$ in die Kurve $S(\mathbf{X}) = \alpha S(\mathbf{E})$ über. Als lineares Bild einer Geodätischen verbindet die interpolierende Kurve $S(\mathbf{X})$ die Eckpunkte von \mathbf{X} auf eine sehr natürlich wirkende Weise.

Im Fall *gerader* Eckenzahl des Polygons zerfällt die von der 1-dimensionalen Untergruppe $S \subset T_g$ erzeugte Mannigfaltigkeit $S(\mathbf{X})$ in die parallelen geschlossenen Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$, die (als Punktmenge) aber auch zusammenfallen können. $S^+(\mathbf{X})$ geht durch die Eckpunkte mit geradem und $S^-(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte mit ungeradem Index. Im Fall $n = 4$ sind $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ zwei parallelverschobene Ellipsen.

Eine 2-dimensionale Untergruppe F von T_n mit $S \subset F$ erzeugt zu jedem Polygon \mathbf{X} mit ungerader Eckenzahl eine 2-dimensionale Torusfläche $F(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte von \mathbf{X} . Es bestehen daher die geometrischen Inklusionen $S(\mathbf{X}) \subset F(\mathbf{X}) \subset T(\mathbf{X})$ entsprechend den Untergruppen-Beziehungen $S \subset F \subset T_n$.

Herrn Carsten Kühn (Tübingen) danke ich für die Erstellung des Textes und die sorgfältige Ausführung der Abbildungen.

1. Zirkulante Matrizen und ihre Spektralform

Mit J bezeichnen wir die zyklische Permutationsmatrix, welche die Spalte $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})^T$ in die Spalte $J\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_0)^T$ überführt. Die erste Zeile von J ist $(0, 1, 0, \dots, 0)$, die zweite $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, und die n -te lautet $(1, 0, \dots, 0)$. Eine Matrix, bei der sich die Zeilen nacheinander durch zyklische Permutation der ersten Zeile ergeben, heißt *zirkulant*. (Zur Theorie der zirkulanten Matrizen vgl. [3]) Eine zirkulante (n, n) -Matrix A wird also durch die Angabe ihrer

ersten Zeile $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ bestimmt. Wir schreiben daher auch $A = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$, also $J = \langle 0, 1, 0, \dots, 0 \rangle$.

Mit Hilfe des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ kann man A auch in der Form

$$A = p(J) = a_0I + a_1J + \dots + a_{n-1}J^{n-1} \quad (1)$$

angeben. (Zirkulante Matrizen A, B sind also vertauschbar: $AB = BA$.) Für unsere Zwecke geeigneter als die *Polynomform* (1) ist die *Spektralform*

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} p(\lambda^j) P_j \quad (2)$$

der zirkulanten Matrix A . Hier ist $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eine n -te Einheitswurzel, und die P_j sind Projektionsmatrizen. D.h., es gilt $P_j \cdot P_k = 0$ für $j \neq k$ und $P_j \cdot P_j = P_j$. Zwischen den Matrizen J und P_j bestehen die Beziehungen

$$P_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-jk} J^k \quad (3)$$

und

$$J^k = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{kj} P_j. \quad (4)$$

Setzt man bei (4) $k = n$, dann erhält man wegen $J^n = I$ in

$$\sum_{j=0}^{n-1} P_j = I \quad (5)$$

eine *Zerlegung der Eins* (Einheitsmatrix).

Die Projektionen P_j stehen in engem Zusammenhang mit den Vektoren $\mathbf{s}_k = (1, \lambda^k, \lambda^{2k}, \dots, \lambda^{(n-1)k})^T$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, des komplexen Vektorraums \mathbb{C}^n . Diese bilden eine orthogonale Basis des \mathbb{C}^n bezüglich des Skalarproduktes $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{x}_j y_j$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. Es gilt $\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_k = n\delta_{jk}$, wenn δ_{jk} das Kroneckersymbol ist. Der Vektor \mathbf{s}_k ist Eigenvektor der Matrix J zum Eigenwert λ^k , $J\mathbf{s}_k = \lambda^k \mathbf{s}_k$. Wegen (3) ist $P_j \mathbf{s}_k = \delta_{jk} \mathbf{s}_k$. Aus der kanonischen Darstellung

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} (\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{x}) \mathbf{s}_j \quad (6)$$

des Vektors \mathbf{x} in bezug auf die Basis $\{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{n-1}\}$ folgt dann durch

Anwendung der Projektion P_k die Beziehung

$$P_k \mathbf{x} = \frac{1}{n} (\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{x}) \mathbf{s}_k. \quad (7)$$

Die Zahlen

$$a_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} (\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-kj} x_j \quad (8)$$

sind die *Fourierkoeffizienten* des n -tupels $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, das sich auch als *Polygon* der komplexen Ebene \mathbb{C} deuten läßt, in bezug auf die orthogonale Basis $\{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{n-1}\}$ des \mathbb{C}^n (s. [5]). Jedes ebene Polygon \mathbf{x} kann also wegen (6) als Summe von regelmäßigen Polygonen (*Sternpolygonen*) dargestellt werden.

Da die Projektionen P_j zirkulante Matrizen sind und jede Linearkombination zirkulanter Matrizen ebenfalls zirkulant ist, folgt mit (2), daß jede zirkulante Matrix A eindeutig in der *Spektralform*

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P_j, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

geschrieben werden kann. Die Koeffizienten c_j sind die *Eigenwerte* von A . Daher ist

$$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} c_j. \quad (10)$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, die *reellen orthogonalen* zirkulanten Matrizen zu bestimmen.

2. Die reellen orthogonalen zirkulanten Matrizen

Eine *reelle* zirkulante Matrix $A = \bar{A}$ muß wegen (9) die Bedingung

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} c_j P_j = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_j \bar{P}_j$$

erfüllen. Aus (3) folgt $\bar{P}_j = P_{n-j} = P_{-j}$, wenn wir mit den Indizes mod n rechnen. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Projektionen P_j ist $c_{n-j} = c_{-j} = \bar{c}_j$. Bei ungerader Zeilenzahl $n = 2m + 1$ besitzt daher eine *reelle* zirkulante Matrix A die Darstellung

$$A = c_0 P_0 + \sum_{j=1}^m (c_j P_j + \bar{c}_j P_{-j}) \quad (11)$$

mit $c_0 \in \mathbb{R}$, und bei gerader Zeilenzahl $n = 2m + 2$ ist

$$A = c_0 P_0 + c_{m+1} P_{m+1} + \sum_{j=1}^m (\epsilon_j P_j + \bar{\epsilon}_j P_{-j}) \quad (12)$$

mit $c_0, c_{m+1} \in \mathbb{R}$.

Als Projektionsmatrizen sind die Matrizen P_j hermitesch, d.h., es gilt $P_j^* = P_j$ mit $P_j^* = \bar{P}_j^T$. (Man rechnet das auch mit (3) leicht nach.) Eine (komplexe) Matrix A mit der Eigenschaft $A^* A = I$ heißt *unitär*. Eine *reelle unitäre* Matrix ist daher orthogonal. Damit die Matrix (11) orthogonal ist, muß also gelten

$$A^* A = c_0^2 P_0 + \sum_{j=1}^m |\epsilon_j|^2 (P_j + P_{-j}) = I$$

Die rechte Seite kann aber wegen (5) in der Form $I = P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1}$ geschrieben werden, so daß wegen der linearen Unabhängigkeit der Projektionen P_j notwendig die Bedingung $c_0^2 = 1$ und $|\epsilon_j|^2 = 1$, d.h., $c_0 = \pm 1$ und $\epsilon_j = e^{2\pi i t_j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, folgt. Mit der Forderung $\det A = c_0 = +1$ (s. (10)) erhält man die Matrizen

$$A(\mathbf{t}) = P_0 + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} P_j + e^{-2\pi i t_j} P_{-j}) \quad (13)$$

mit $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$. Die Matrizen $A(\mathbf{t})$ bilden eine m -dimensionale *Liegruppe* T_n , und zwar einen sogenannten *Torus*, das ist eine abelsche Untergruppe der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(n)$ (s. [2]). Die Multiplikation in T_n erfolgt nach der Regel $A(\mathbf{t}) \cdot A(\mathbf{t}') = A(\mathbf{t} + \mathbf{t}')$. Im Fall gerader Zeilenzahl $n = 2m + 2$ führt die Bedingung $\det A = +1$ auf die m -dimensionale Liegruppe T_g der Matrizen

$$A(\mathbf{t}) = P_0 + P_{m+1} + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} P_j + e^{-2\pi i t_j} P_{-j}). \quad (14)$$

Insbesondere bei geometrischen Interpretationen erweist sich die Schreibweise

$$A(\mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) J^k = \langle \sigma_0(\mathbf{t}), \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_{n-1}(\mathbf{t}) \rangle \quad (15)$$

als vorteilhaft. Indem man bei (13) die Projektionen P_j, P_{-j} durch die Darstellung (3) ersetzt und die Faktoren bei den Permutationen J^k

sammelt, ergibt sich im Fall $n = 2m + 1$:

$$\sigma_k(\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} \lambda^{-jk} + e^{-2\pi i t_j} \lambda^{jk}) \right). \quad (16)$$

In reeller Schreibweise ist also

$$\sigma_k(\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^m \cos 2\pi \left(t_j - \frac{jk}{n} \right) \right). \quad (17)$$

Beim geraden Fall $n = 2m + 2$ folgt auf die gleiche Weise mit (14):

$$\sigma_k(\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \left(1 + (-1)^k + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} \lambda^{-jk} + e^{-2\pi i t_j} \lambda^{jk}) \right) \quad (18)$$

bzw.

$$\sigma_k(\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \left(1 + (-1)^k + 2 \sum_{j=1}^m \cos 2\pi \left(t_j - \frac{jk}{n} \right) \right) \quad (19)$$

in der reellen Schreibweise.

Wir betrachten nun die Funktionen $\sigma_k(\mathbf{t})$ an den Stellen $\mathbf{t}_l = \frac{l}{n} \cdot (1, 2, \dots, m)$ mit $l = 0, 1, \dots, n-1$. Es ist also bei (16) bzw. (18) $t_j = \frac{l}{n} j$ zu setzen. Im Fall $n = 2m + 1$ ergibt sich dann

$$\sigma_k(\mathbf{t}_l) = \delta_{k,l}, \quad (20)$$

wobei $\delta_{k,l}$ das Kroneckersymbol bedeutet. Im Fall $n = 2m + 2$ muß man zwischen l gerade und l ungerade unterscheiden und findet:

$$\sigma_k(\mathbf{t}_{2l}) = \delta_{k,2l} \quad (21)$$

und

$$\sigma_k(\mathbf{t}_{2l+1}) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{n}, & k = 2l + 1 \\ (-1)^k \frac{2}{n}, & k \neq 2l + 1. \end{cases} \quad (22)$$

Aus den Spektraldarstellungen (13) und (14) sowie aus der Gruppeneigenschaft der Matrizen $A(\mathbf{t})$ folgen *funktionale Beziehungen* für das Funktionensystem $\sigma_0(\mathbf{t}), \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_{n-1}(\mathbf{t})$. Die Matrix $A(\mathbf{t})$ besitzt die Eigenwerte $1, e^{2\pi i t_j}, e^{-2\pi i t_j}$ im Fall $n = 2m + 1$ bzw. $1, -1, e^{2\pi i t_j}, e^{-2\pi i t_j}$ im Fall $n = 2m + 2$. Zugehörige Eigenvektoren sind im ersten Fall die Vektoren $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{s}_j = (1, \lambda^j, \dots, \lambda^{(n-1)j})^T$ und $\mathbf{s}_{-j} = (1, \lambda^{-j}, \dots, \lambda^{-(n-1)j})^T$. Zum Eigenwert -1 gehört der Eigenvektor

$(-1, 1, \dots, -1, 1)$. Aus der Beziehung $\mathcal{A}(\mathbf{t})\mathbf{e} = \mathbf{e}$ folgt dann

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) = 1. \quad (23)$$

Das bedeutet: Die Funktionen $\sigma_k(\mathbf{t})$ bilden eine *Zerlegung der Eins*. Aus $\mathcal{A}(t)\mathbf{s}_j = e^{2\pi i t_j} \mathbf{s}_j$ bzw. $\mathcal{A}(\mathbf{t})\mathbf{s}_{-j} = e^{-2\pi i t_j} \mathbf{s}_{-j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, folgen entsprechend die funktionalen Beziehungen

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{jk} \sigma_k(\mathbf{t}) = e^{2\pi i t_j} \quad (24)$$

bzw.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-jk} \sigma_k(\mathbf{t}) = e^{-2\pi i t_j}. \quad (25)$$

Im Fall $n = 2m + 2$ tritt noch die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_k(\mathbf{t}) = -1 \quad (26)$$

hinzu. Die Verknüpfungsregel $\mathcal{A}(\mathbf{t}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{t}') = \mathcal{A}(\mathbf{t} + \mathbf{t}')$ impliziert die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) \sigma_{l-k}(\mathbf{t}') = \sigma_l(\mathbf{t} + \mathbf{t}'), \quad (27)$$

und da $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ eine orthogonale Matrix ist, d.h., es gilt $\mathcal{A}(\mathbf{t})\mathcal{A}(\mathbf{t})^T = I$, bilden die Zeilenvektoren von $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ ein Orthogonalsystem. Das bedeutet:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k^2(\mathbf{t}) = 1 \quad (28)$$

und

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) \sigma_{k+l}(\mathbf{t}) = 0 \quad (29)$$

für $l = 1, 2, \dots, n-1$. Das System der Funktionen $\sigma_k^2(\mathbf{t})$ bildet also ebenfalls eine *Zerlegung der Eins*.

Die Wirkung der Matrix $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ auf einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2m + 1$, wird besonders durchsichtig, wenn man \mathbf{x} bezüglich der Basis $\{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m, \mathbf{s}_{-1}, \mathbf{s}_{-2}, \dots, \mathbf{s}_{-m}\}$ des \mathbb{C}^n (die auch eine Basis des \mathbb{R}^n ist)

darstellt. Sei

$$\mathbf{x} = y_0 \mathbf{s}_0 + \sum_{j=1}^m (y_j \mathbf{s}_j + y_{-j} \mathbf{s}_{-j}), \quad (30)$$

wobei $y_0 \in \mathbb{R}$ ist und $y_{-j} = \bar{y}_j$ gilt, dann folgt mit (13) unter Beachtung von $\mathcal{A}(\mathbf{t})\mathbf{s}_{\pm j} = e^{\pm 2\pi i t_j} \mathbf{s}_{\pm j}$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{t})\mathbf{x} = y_0 \mathbf{s}_0 + \sum_{j=1}^m (y_j e^{2\pi i t_j} \mathbf{s}_j + y_{-j} e^{-2\pi i t_j} \mathbf{s}_{-j}) \quad (31)$$

In bezug auf die Basis $\{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_j, \mathbf{s}_{-j}\}$ hat $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ daher die *Diagonalform*

$$\mathcal{A}(\mathbf{t}) = \text{diag}(1, e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_m}, e^{-2\pi i t_1}, \dots, e^{-2\pi i t_m}) \quad (32)$$

Beispiel 1: Im Fall $n = 3$, $\lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ist $\mathbf{s}_0^T = (1, 1, 1) = \mathbf{e}^T$, $\mathbf{s}_1^T = (1, \lambda, \lambda^2) = \mathbf{a}^T + i\mathbf{b}^T$ mit $\mathbf{a} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\mathbf{b} = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ und $\mathbf{s}_{-1} = \bar{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{a}^T - i\mathbf{b}^T$. Die Vektoren $\{\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bilden eine positiv orientierte Orthogonalbasis des \mathbb{R}^3 . Bezüglich der Basen $\{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{-1}\}$ und $\{\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ schreibt sich der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= y_0 \mathbf{s}_0 + y_1 \mathbf{s}_1 + y_{-1} \mathbf{s}_{-1} \\ &= y_0 \mathbf{e} + 2y_{11} \mathbf{a} + 2y_{12} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (33)$$

mit $y_1 = y_{11} - iy_{12}$. Wendet man auf den Vektor $\mathbf{y}^T = (1, y_1, y_{-1})$ die Matrix

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi i t} \end{pmatrix} \quad (34)$$

an, dann findet man

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t)\mathbf{x} &= y_0 \mathbf{e} + 2(\cos 2\pi t \cdot y_{11} - \sin 2\pi t \cdot y_{12})\mathbf{a} \\ &\quad + 2(\sin 2\pi t \cdot y_{11} + \cos 2\pi t \cdot y_{12})\mathbf{b} \end{aligned} \quad (35)$$

Das bedeutet: Die Matrix $\mathcal{A}(t)$ beschreibt eine *Drehung* gegen den Uhrzeigersinn um die Achse \mathbf{e} mit dem Drehwinkel $2\pi t$.

3. Die Torusfläche eines Polygons

Die Punkte eines \mathbb{R}^d beliebiger Dimension d kennzeichnen wir durch ihre Ortsvektoren in bezug auf einen Ursprung O . Mit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ bezeichnen wir ein *Polygon* als n -tupel von Punkten

des \mathbb{R}^d . Bei der Matrix·Vektor-Notation ist \mathbf{X} immer als Spalte zu verstehen. Das Produkt $X \cdot Y$ ist das *Skalarprodukt* in \mathbb{R}^d .

Die Matrizen $A(\mathbf{t}) \in T_n$ transformieren ein Polygon \mathbf{X} mit ungerader Eckenanzahl in eine Schar von Polygonen $A(\mathbf{t})\mathbf{X}$, deren Struktur wir im folgenden untersuchen.

3.1. Ungerade Eckenanzahl

Es sei also \mathbf{X} ein Polygon mit ungerader Eckenanzahl $n = 2m + 1$. Wir betrachten die m -dimensionale Mannigfaltigkeit $T_n\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(\mathbf{t}) | \mathbf{X}(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})\mathbf{X}, A(\mathbf{t}) \in T_n\}$. Dann findet man mit (13) unter Berücksichtigung der Beziehungen (7), (8) für $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ die *komplexe* Darstellung

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = a_0(\mathbf{X})\mathbf{s}_0 + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} a_j(\mathbf{X})\mathbf{s}_j + e^{-2\pi i t_j} a_{-j}(\mathbf{X})\mathbf{s}_{-j}). \quad (36)$$

Diese ist gegenüber der *reellen* Darstellung (s. (15))

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \langle \sigma_0(\mathbf{t}), \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_{n-1}(\mathbf{t}) \rangle \mathbf{X} \quad (37)$$

strukturell durchsichtiger. Jede Komponente $X_k(\mathbf{t})$ des n -tupels $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = (X_0(\mathbf{t}), X_1(\mathbf{t}), \dots, X_{n-1}(\mathbf{t}))$ läßt sich als *Parameterdarstellung* einer m -dimensionalen Fläche in \mathbb{R}^d auffassen. Aus (36) liest man ab:

$$X_k(\mathbf{t}) = a_0(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} a_j(\mathbf{X})\lambda^{jk} + e^{-2\pi i t_j} a_{-j}(\mathbf{X})\lambda^{-jk}) \quad (38)$$

Die durch $X_k(\mathbf{t})$ parametrisierte Fläche besitzt die Struktur $e^{2\pi i t_1} \times e^{2\pi i t_2} \times \dots \times e^{2\pi i t_m}$ einer m -dimensionalen *Torusfläche*. Wegen $e^{2\pi i t_j} \lambda^{jk} = e^{2\pi i(t_j + jk/n)}$ sind die Komponenten $X_k(\mathbf{t})$ nur unterschiedliche Parametrisierungen *derselben* zum Polygon \mathbf{X} gehörigen Torusfläche $T(\mathbf{X})$. Als Standardbeschreibung von $T(\mathbf{X})$ wählen wir die Parametrisierung $X(\mathbf{t}) = X_0(t)$, also

$$X(\mathbf{t}) = a_0(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} a_j(\mathbf{X}) + e^{-2\pi i t_j} a_{-j}(\mathbf{X})) \quad (39)$$

bzw.

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) X_k \quad (40)$$

mit reellen Koeffizienten $\sigma_k(t)$.

Den Fourierkoeffizienten $a_j(\mathbf{X})$ kann man in der Form (s. (8))

$$a_j(\mathbf{X}) = b_j(\mathbf{X}) - i c_j(\mathbf{X}) \quad (41)$$

mit

$$\begin{aligned} b_j(\mathbf{X}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos 2\pi j k}{n} X_k, \\ c_j(\mathbf{X}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin 2\pi j k}{n} X_k \end{aligned} \quad (42)$$

schreiben. Damit geht (39) über in die Darstellung

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = a_0(\mathbf{X}) + 2 \sum_{j=1}^m (\cos 2\pi t_j \cdot b_j(\mathbf{X}) + \sin 2\pi t_j \cdot c_j(\mathbf{X})). \quad (43)$$

Eine Beziehung der Form $Y(t) = 2 \cos 2\pi t \cdot \mathbf{b} + 2 \sin 2\pi t \cdot \mathbf{c}$ ist die Parameterdarstellung einer Ellipse in der von den (reellen) Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Ebene. Daher gibt die Darstellung (43) den Aufbau der Fläche als additive Überlagerung von m Ellipsen in den von den Vektoren $b_j(\mathbf{X}), c_j(\mathbf{X})$ aufgespannten Ebenen wieder.

Die Fläche $T(\mathbf{X})$ wird allein durch die Geometrie des Polygons \mathbf{X} , d.h. durch seine Eckpunkte bestimmt. Sind nämlich $X'_k = X_k + C, C \in \mathbb{R}^d$, die Ortsvektoren der Eckpunkte bezüglich des Ursprungs O' , dann folgt mit (40) und (23): $X'(\mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) X'_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{t})(X_k + C) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) X_k + C = X(\mathbf{t}) + C$.

Die Eckpunkte von \mathbf{X} liegen auf der Torusfläche $T(\mathbf{X})$. Mit (20) erhält man nämlich:

$$X(\mathbf{t}_l) = X_l, \quad l = 0, 1, \dots, n-1. \quad (44)$$

Beispiel 2: Im Fall des Dreiecks $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$ hat die Torusfläche $T(\mathbf{X})$ die Parameterdarstellung (s. (36), (37), (17), (8))

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{3}(X_0 + X_1 + X_2) + e^{2\pi i t} \frac{1}{3}(X_0 + \lambda^{-1} X_1 + \lambda^{-2} X_2) \\ &\quad + e^{-2\pi i t} \frac{1}{3}(X_0 + \lambda X_1 + \lambda^2 X_2) \end{aligned} \quad (45)$$

mit $\lambda = e^{2\pi i/3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, b\zeta w$.

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{3}(1 + 2 \cos 2\pi t) X_0 + \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \left(t - \frac{1}{3} \right) \right) X_1 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \left(t - \frac{2}{3} \right) \right) X_2 \end{aligned} \quad (46)$$

in der reellen Schreibweise. $X(t)$ ist die Parameterdarstellung einer *Ellipse* in \mathbb{R}^d . Offenbar kann man nämlich (46) auf die Form $X(t) = \frac{1}{3}(X_0 + X_1 + X_2) + \cos 2\pi t \cdot A + \sin 2\pi t \cdot B$ mit Vektoren $A, B \in \mathbb{R}^d$ bringen. Die Ellipse geht durch die Punkte $X_0 = X(0), X_1 = X(\frac{1}{3})$ und $X_2 = X(\frac{2}{3})$. Wegen $\frac{1}{2}(X(t) + X(t + \frac{1}{2})) = \frac{1}{3}(X_0 + X_1 + X_2)$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks \mathbf{X} zugleich der Mittelpunkt der Ellipse. Also ist $T(\mathbf{X})$ die zum Dreieck \mathbf{X} gehörige *Steinersche Ellipse*. \square

Die Fläche $T(\mathbf{X})$ ist *symmetrisch* zum *Schwerpunkt* $a_0(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1})$ des Polygons \mathbf{X} . Es gilt nämlich wegen $\sigma_k(\mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{e}) + \sigma_k(\mathbf{t}) = \frac{2}{n}, \mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$,

$$\frac{1}{2} \left(X(\mathbf{t}) + X(\mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{e}) \right) = a_0(\mathbf{X}), \quad (47)$$

wie die Parameterdarstellung (36) erkennen läßt.

Wir bestimmen die *Tangentialebene* an $T(\mathbf{X})$ in einem Punkt X_l . Der Tangentialvektor $\mathbf{v}_j(\mathbf{t})$ im Punkt $X(\mathbf{t})$ in Richtung t_j ist der Vektor

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial t_j} \sigma_k(\mathbf{t}) X_k = \frac{2\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2\pi i t_j} \lambda^{-jk} - e^{-2\pi i t_j} \lambda^{jk}) X_k. \quad (48)$$

In einem Eckpunkt $X_l = X(\mathbf{t}_l), \mathbf{t}_l = \frac{l}{n} \cdot (1, 2, \dots, m)$, ist dann:

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{t}_l) = \frac{2\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda^{j(l-k)} - \lambda^{-k(l-k)}) X_k \quad (49)$$

Setzt man $k = l \pm r, r = 0, 1, \dots, m$, so folgt für den Tangentialvektor in Richtung t_j im Punkte $X_l \in T(\mathbf{X})$ die Darstellung

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{t}_l) = \frac{4\pi}{n} \sum_{r=1}^m \sin \frac{2\pi jr}{n} (X_{l-r} - X_{l+r}). \quad (50)$$

Die Tangentialebene an den Torus $T(\mathbf{X})$ im Punkte X_l wird also aufgespannt von den Vektoren $X_{l-r} - X_{l+r}, r = 1, 2, \dots, m$. Im Fall des Dreiecks $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$ ist dies eine Eigenschaft der *Steinerschen Ellipse*.

Die reellen Matrizen $A(\mathbf{t}) \in T_u$ sind orthogonal. Daher ist die *Quadratsumme*

$$Q(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 \quad (51)$$

eine Invariante der Polygone $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})\mathbf{X}, A(\mathbf{t}) \in T_u$, d.h. es gilt

$$Q(\mathbf{X}(\mathbf{t})) = Q(\mathbf{X}). \quad (52)$$

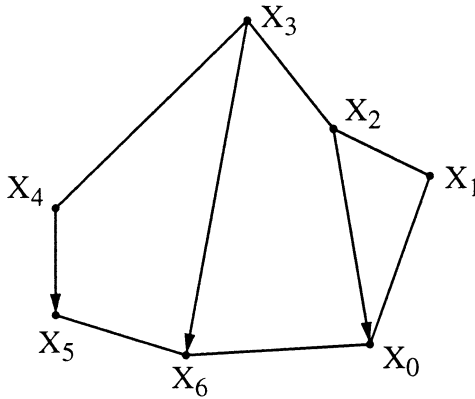


Abb. 2. Die Tangentialebene im Punkt X_1 an den Torus $T(\mathbf{X})$ durch das Siebeneck $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_6)$ wird aufgespannt von den Vektoren $X_0 - X_2, X_6 - X_3$ und $X_5 - X_4$

Ist C eine reelle zirkulante (n, n) -Matrix, dann besteht wegen der Vertauschbarkeit der Matrizen C und $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ außerdem die Invarianzbeziehung

$$Q(C\mathbf{X}(\mathbf{t})) = Q(C\mathbf{X}). \quad (53)$$

So überträgt sich z.B. die Invarianzeigenschaft (53) über die zirkulante Matrix $C = J - I$ auf das Polygon $(J - I)\mathbf{X}$ der Seiten $X_{j+1} - X_j$ von \mathbf{X} .

Der Standardtorus

Den Torus $T(\mathbf{E})$, der zur Standardbasis $\mathbf{E} = (E_0, E_1, \dots, E_{n-1})$ mit $E_0 = (1, 0, \dots, 0), E_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_{n-1} = (0, \dots, 0, 1)$, des \mathbb{R}^n gehört, bezeichnen wir als *Standardtorus*. Seine Parameterdarstellung lautet

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) \mathbf{E}_k \quad (54)$$

Aus (28) liest man ab: $T(\mathbf{E})$ liegt auf der Einheitskugel $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$ des \mathbb{R}^n . Mit der komplexen Darstellung (16) der

Funktionen $\sigma_k(\mathbf{t})$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 X(\mathbf{t}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} \lambda^{-jk} + e^{-2\pi i t_j} \lambda^{jk}) \right) E_k \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E_k + \sum_{j=1}^m e^{2\pi i t_j} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-jk} E_k + \sum_{j=1}^m e^{-2\pi i t_j} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{jk} E_k \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E_k + \sum_{j=1}^m \cos 2\pi t_j \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda^{-jk} + \lambda^{jk}) E_k \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \sin 2\pi t_j \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda^{-jk} - \lambda^{jk}) E_k
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile veranlaßt dazu, die (reellen) Vektoren

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E_k \\
 B_j^+ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda^{jk} + \lambda^{-jk}) E_k, \quad j = 1, 2, \dots, m \\
 B_j^- &= \frac{1}{in} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda^{jk} - \lambda^{-jk}) E_k, \quad j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{55}$$

einzuführen. Diese bilden eine *Orthogonalbasis* des \mathbb{R}^n mit $\|B_0\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $\|B_j^+\| = \|B_j^-\| = \sqrt{\frac{2}{n}}$. Bezüglich der Basis $\mathbf{B} = \{B_0, B_1^\pm, B_2^\pm, \dots, B_m^\pm\}$ hat der Standardtorus $T(\mathbf{E})$ die Parameterdarstellung

$$X(\mathbf{t}) = B_0 + \sum_{j=1}^m \cos 2\pi t_j B_j^+ + \sum_{j=1}^m \sin 2\pi t_j B_j^-. \tag{56}$$

Eine *parameterfreie* Darstellung der Fläche $T(\mathbf{E})$ erhält man dann in Form des algebraischen Gleichungssystems

$$x_0 = 1, x_j^2 + y_j^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{57}$$

wenn man den Vektor $X = (x_0, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ auf die Basis \mathbf{B} bezieht. Die Torusfläche ist also eine *algebraische* Fläche, und zwar der Durchschnitt der Hyperfläche $x_0 = 1$ mit den m Zylinderflächen $x_j^2 + y_j^2 = 1$.

Ein beliebiger Torus $T(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^d$ ist das Bild $\alpha T(\mathbf{E})$ des Standardtorus $T(\mathbf{E})$ unter der linearen Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, die dem Basisvektor $E_k \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $X_k = \alpha E_k \in \mathbb{R}^d$ zuordnet. Der Torus $T(\mathbf{X})$ ist daher ebenfalls eine algebraische Fläche. Im Unterschied zu $T(\mathbf{E})$ können bei $T(\mathbf{X})$ auch Selbstdurchdringungen der Fläche auftreten.

Bemerkung: Die Gruppe T_n induziert auf dem Standardtorus $T(\mathbf{E})$ eine zu T_n isomorphe Gruppenstruktur. Zu jedem Punkt $P \in T(\mathbf{E})$ gehört nämlich eindeutig ein Koordinaten- n -tupel $(\sigma_0(\mathbf{t}), \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_{n-1}(\mathbf{t}))$ bezüglich der Basis \mathbf{E} . Dieses wiederum bestimmt (als erste Zeile der Matrix $A(\mathbf{t})$) eindeutig ein Gruppenelement $A(\mathbf{t})$. Umgekehrt bestimmt jedes Gruppenelement $A(\mathbf{t}) \in T_n$ eindeutig einen Punkt $P \in T(\mathbf{E})$. Definiert man die Verknüpfung $P \circ Q$ zweier Punkte $P, Q \in T(\mathbf{E})$ auf kanonische Weise mit Hilfe der Verknüpfungsregel in der Gruppe T_n , dann bildet $(T(\mathbf{E}), \circ)$ eine zu T_n isomorphe Gruppe. \triangle

Der folgende Satz faßt die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

Satz 1: Zu jedem Polygon $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ mit ungerader Eckenzahl $n = 2m + 1$ gehört eine m -dimensionale Torusfläche $T(\mathbf{X})$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $T(\mathbf{X})$ geht durch die Eckpunkte X_k von \mathbf{X} . Der Schwerpunkt des Polygons \mathbf{X} ist zugleich das Symmetriezentrum der Fläche $T(\mathbf{X})$.

(2) $T(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^d$ ist das Bild des Standardtorus $T(\mathbf{E}) \subset \mathbb{R}^n$ unter der linearen Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, die dem Basisvektor $E_k \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $X_k = \alpha(E_k) \in \mathbb{R}^d$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, zuordnet.

(3) Die Tangentialebene an $T(\mathbf{X})$ im Punkte X_k wird aufgespannt von den Vektoren $X_{k-j} - X_{k+j}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

(4) Ist $A(\mathbf{t})$ ein Element der Gruppe T_n der orthogonalen reellen zirkulanten (n, n) -Matrizen, dann liegt das Polygon $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})\mathbf{X}$ auf $T(\mathbf{X})$, und die Polygone $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ und \mathbf{X} haben denselben Schwerpunkt.

(5) Die Quadratsumme $Q(\mathbf{X}) = X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_{n-1}^2$ ist eine Invariante der Polygone $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})\mathbf{X}$, $A(\mathbf{t}) \in T_n$, d.h., es gilt $Q(\mathbf{X}(\mathbf{t})) = Q(\mathbf{X})$. Allgemein gilt $Q(C\mathbf{X}(\mathbf{t})) = Q(C\mathbf{X})$, wenn C eine beliebige reelle zirkulante Matrix ist.

Beispiel 3: Auf jeder Ellipse gibt es Punkttupel X_0, X_1, X_2 , deren Schwerpunkt mit dem Ellipsenmittelpunkt zusammenfällt. Ein solches Punkttupel bilden z.B. die Punkte $P_0 = (a, 0)$, $P_1 = (-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2})$, $P_2 = (-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}b}{2})$, wenn a, b die Halbachsen der Ellipse sind. Folglich ist jede Ellipse eine *Steinersche Ellipse*.

Wir denken uns die Steinersche Ellipse durch die Punkte P_0, P_1, P_2 in den \mathbb{R}^3 eingebettet. Die Ortsvektoren X_0, X_1, X_2 der Punkte P_0, P_1, P_2 seien linear unabhängig. Der Standardtorus $T(\mathbf{E})$ im \mathbb{R}^3 ist der Kreis

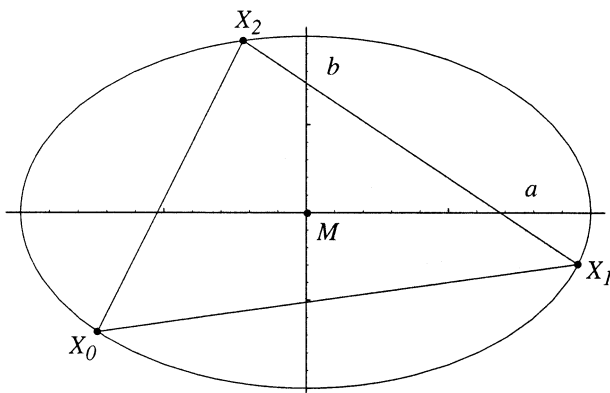


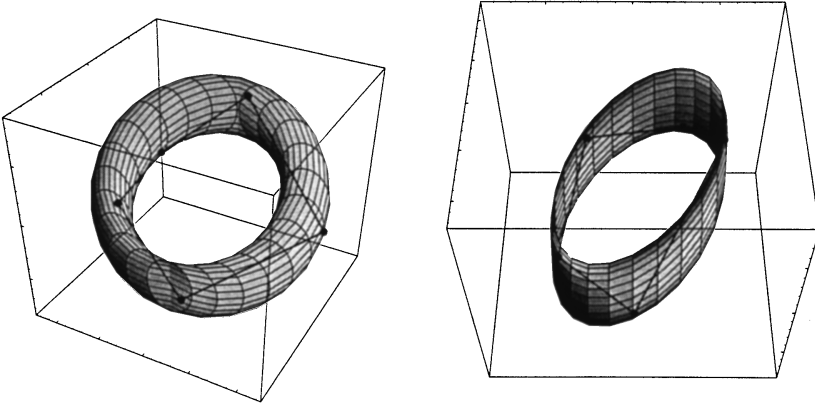
Abb. 3. Konfiguration zu Satz 2

durch die Punkte $E_0 = (1, 0, 0)$, $E_1 = (0, 1, 0)$, $E_2 = (0, 0, 1)$. Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\alpha E_k = X_k$, $k = 0, 1, 2$, bildet dann den Kreis $T(\mathbf{E})$ und die Ellipse $T(\mathbf{X})$ bijektiv aufeinander ab: $T(\mathbf{X}) = \alpha T(\mathbf{E})$. Haben die Punkte $Y_k \in T(\mathbf{X})$, $k = 0, 1, 2$, den Ellipsenmittelpunkt zum Schwerpunkt, dann gilt $\frac{1}{3}(Y_0 + Y_1 + Y_2) = \frac{1}{3}(X_0 + X_1 + X_2)$, also $\frac{1}{3}(\alpha^{-1}Y_0 + \alpha^{-1}Y_1 + \alpha^{-1}Y_2) = \frac{1}{3}(E_0 + E_1 + E_2) = \frac{1}{3}\mathbf{e}$. Die Urbildpunkte $Y'_k = \alpha^{-1}Y_k \in T(\mathbf{E})$ haben den Kreismittelpunkt $\frac{1}{3}\mathbf{e}$ zum Schwerpunkt. Sie bilden daher ein gleichseitiges Dreieck auf $T(\mathbf{E})$. Da die Matrix $A(t)$ bezüglich $T(\mathbf{E})$ eine *Drehung* um die Achse \mathbf{e} darstellt (vgl. Beispiel 1), so gibt es einen Parameter t_0 , so daß $\mathbf{Y}' = A(t_0)\mathbf{E}$ ist und folglich $\mathbf{Y} = A(t_0)\mathbf{X}$. Mit der zirkulanten Matrix $C = J - I$, die einem Polygon \mathbf{X} das Polygon $(J - I)\mathbf{X}$ seiner Seitenvektoren zuordnet, folgt dann die Invarianzbeziehung $Q((J - I)\mathbf{Y}) = Q((J - I)\mathbf{X})$. Mit $(X_1 - X_0)^2 = |P_1 P_0|^2 = (-\frac{a}{2} - a)^2 + (\frac{\sqrt{3}b}{2} - 0)^2$, $(X_2 - X_1)^2 = |P_2 P_1|^2 = (-\frac{a}{2} + \frac{a}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2})^2$, $(X_0 - X_2)^2 = |P_0 P_2|^2 = (a + \frac{a}{2})^2 + (0 + \frac{\sqrt{3}b}{2})^2$ ergibt sich dann $Q((J - I)\mathbf{X}) = \frac{9}{2}(a^2 + b^2)$. Wir erhalten daher die Invarianzbeziehung $Q((J - I)\mathbf{Y}) = \frac{9}{2}(a^2 + b^2)$ (s. Abb. 3).

Satz 2: Für jedes Dreieck Y_0, Y_1, Y_2 auf einer Ellipse, dessen Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt der Ellipse zusammenfällt, bildet die Summe der Seitenquadrate eine Invariante. Und zwar gilt:

$$(Y_1 - Y_0)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Y_0 - Y_2)^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2) \quad (58)$$

Dabei sind a, b die Halbachsen der Ellipse.

Abb. 4. Zwei Ansichten der Torusfläche $T(\mathbf{X})$ durch ein Fünfeck \mathbf{X} im Raum

3.2. Gerade Eckenzahl

Bei gerader Eckenzahl $n = 2m + 2$ eines Polygons \mathbf{X} besteht die Mannigfaltigkeit $T_g \mathbf{X}$ aus *zwei* parallelen Torusflächen. Dies wird durch das Auftreten der n -ten Einheitswurzel -1 und der zugehörigen Projektion P_{m+1} bewirkt. Die Elemente der Mannigfaltigkeit $T_g \mathbf{X} = \{\mathbf{X}(\mathbf{t}) | \mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathcal{A}(\mathbf{t})\mathbf{X}, \mathcal{A}(\mathbf{t}) \in T_g\}$ haben die komplexe Darstellung (s. (7), (8), (14)):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{t}) = & a_0(\mathbf{X})\mathbf{s}_0 + a_{m+1}(\mathbf{X})\mathbf{s}_{m+1} \\ & + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} a_j(\mathbf{X})\mathbf{s}_j + e^{-2\pi i t_j} a_{-j}(\mathbf{X})\mathbf{s}_{-j}) \end{aligned} \quad (59)$$

mit $a_{m+1}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}(X_0 - X_1 + \dots + X_{n-2} - X_{n-1})$ und mit $\mathbf{s}_{m+1} = (1, -1, \dots, 1, -1)^T$. Die reelle Darstellung von $T_g \mathbf{X}$ lautet

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \langle \sigma_0(\mathbf{t}), \sigma_1(\mathbf{t}), \dots, \sigma_{n-1}(\mathbf{t}) \rangle \mathbf{X} \quad (60)$$

mit den Funktionen $\sigma_k(\mathbf{t})$ von (18).

Die Komponenten des Ausdrucks unter dem Summenzeichen auf der rechten Seite von (59) sind nur verschiedene Parameterdarstellungen derselben Torusfläche. Wegen der alternierenden Vorzeichen bei den Komponenten des Vektors \mathbf{s}_{m+1} stellen daher die Komponenten $X_{2k}(\mathbf{t})$ bzw. $X_{2k+1}(\mathbf{t})$ jeweils dieselbe Torusfläche $T^+(\mathbf{X})$ bzw. $T^-(\mathbf{X})$ dar. Wir

repräsentieren diese Flächen durch ihre Parameterdarstellungen

$$X^+(\mathbf{t}) = X_0(\mathbf{t}) = a_0(\mathbf{X}) + a_{m+1}(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} a_j(\mathbf{X}) + e^{-2\pi i t_j} a_{-j}(\mathbf{X})) \quad (61)$$

und

$$X^-(\mathbf{t}) = X_1(\mathbf{t}) = a_0(\mathbf{X}) - a_{m+1}(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i t_j} a_j(\mathbf{X}) \lambda^j + e^{-2\pi i t_j} a_{-j}(\mathbf{X}) \lambda^{-j}). \quad (62)$$

Die Flächen $T^+(X)$ und $T^-(X)$ gehen offenbar durch Verschiebung um den Vektor $2a_{m+1}(\mathbf{X})$ auseinander hervor. Symbolisch kann man schreiben: $\frac{1}{2}(T^+(\mathbf{X}) - T^-(\mathbf{X})) = a_{m+1}(\mathbf{X})$. Den Darstellungen (61), (62) entsprechen die reellen Darstellungen

$$X^+(\mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) X_k \quad (63)$$

und

$$X^-(\mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\mathbf{t}) X_{k+1}. \quad (64)$$

Die Fläche $T^+(\mathbf{X})$ geht durch die Punkte X_{2l} , und die Fläche $T^-(\mathbf{X})$ geht durch die Punkte X_{2l+1} . Wegen $\sigma(\mathbf{t}_{2l}) = \delta_{k,2l}$ (s. (21)) ist nämlich

$$X^+(\mathbf{t}_{2l}) = X_{2l} \quad (65)$$

und

$$X^-(\mathbf{t}_{2l}) = X_{2l+1}. \quad (66)$$

Außerdem geht $T^+(\mathbf{X})$ durch die Punkte $-X_{2l+1}$ und $T^-(\mathbf{X})$ geht durch die Punkte $-X_{2l+2}$, wenn man den Schwerpunkt $a_0(\mathbf{X})$ des Polygons \mathbf{X} zum Ursprung macht. Aus (18) liest man nämlich zunächst ab:

$$\sigma_k(\mathbf{t}) + \sigma_k\left(\mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{e}\right) = \frac{2}{n}(1 + (-1)^k) \quad (67)$$

Dann findet man mit (22):

$$\begin{aligned}
 X^+ \left(\mathbf{t}_{2l+1} + \frac{1}{2} \mathbf{e} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \left(\mathbf{t}_{2l+1} + \frac{1}{2} \mathbf{e} \right) X_k \\
 &= - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k (\mathbf{t}_{2l+1}) X_k + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + (-1)^k) X_k \\
 &= - \left(1 - \frac{2}{n} \right) X_{2l+1} - \frac{2}{n} \sum_{k \neq 2l+1} (-1)^k X_k \\
 &\quad + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + (-1)^k) X_k \\
 &= -X_{2l+1} + 2a_0(\mathbf{X})
 \end{aligned}$$

Liegt der Ursprung der Ortsvektoren im Schwerpunkt des Polygons \mathbf{X} , dann ist $a_0(\mathbf{X}) = 0$. Somit folgt

$$X^+ \left(\mathbf{t}_{2l+1} + \frac{1}{2} \mathbf{e} \right) = -X_{2l+1}. \quad (68)$$

Ganz analog zeigt man

$$X^- \left(\mathbf{t}_{2l+1} + \frac{1}{2} \mathbf{e} \right) = -X_{2l+2}. \quad (69)$$

Die Aussage über die Tangentialebene an $T(\mathbf{X}) = T^+(\mathbf{X}) \cup T^-(\mathbf{X})$ im Punkte X_k ist wörtlich dieselbe wie im Fall ungerader Eckenzahl (vgl. Satz 1 (3)). Bei der Invarianzaussage $\mathcal{Q}(\mathbf{X}(\mathbf{t})) = \mathcal{Q}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathcal{A}(\mathbf{t})\mathbf{X}$, $\mathcal{A}(\mathbf{t}) \in T_g$, ist jetzt zu beachten, daß die Eckpunkte der Polygone \mathbf{X} und $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ alternierend auf den Flächen $T^+(\mathbf{X})$ und $T^-(\mathbf{X})$ liegen.

Wir fassen die Aussagen zum Fall gerader Eckenzahl, soweit sie sich vom ungeraden Fall unterscheiden, zusammen:

Satz 3: Zu jedem Polygon $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ mit gerader Eckenzahl $n = 2m + 2$ gehört eine m -dimensionale Fläche $T(\mathbf{X})$, die die Vereinigung zweier Torusflächen $T^+(\mathbf{X})$ und $T^-(\mathbf{X})$ ist. Die Fläche $T(\mathbf{X}) = T^+(\mathbf{X}) \cup T^-(\mathbf{X})$ ist symmetrisch zum Schwerpunkt des Polygons \mathbf{X} , und es gilt:

Der Torus $T^+(\mathbf{X})$ geht durch die Eckpunkte X_{2l} von \mathbf{X} mit geraden Index, und der Torus $T^-(\mathbf{X})$ geht durch die Eckpunkte X_{2l+1} mit ungeradem Index. Mit dem Schwerpunkt von \mathbf{X} als Ursprung gilt außerdem: Der Torus $T^+(\mathbf{X})$ geht durch die Punkte $-X_{2l+1}$, und der Torus $T^-(\mathbf{X})$ geht durch die Punkte $-X_{2l}$.

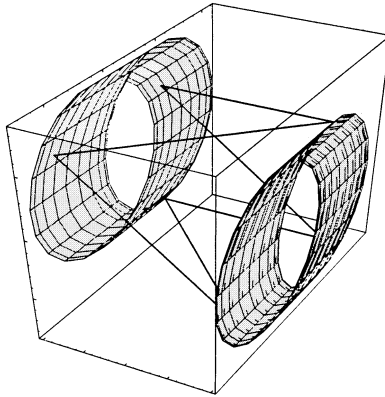


Abb. 5. Die parallelen Torusflächen $T^+(\mathbf{X})$ und $T^-(\mathbf{X})$ im Falle eines räumlichen Sechsecks \mathbf{X}

4. Interpolation von Polygonen

Eine 1-dimensionale Untergruppe S der Gruppe T_u erzeugt eine geschlossene C_∞ -Kurve $S(\mathbf{X})$, die durch die Eckpunkte des Polygons \mathbf{X} mit ungerader Eckenzahl geht und die ganz in $T(\mathbf{X})$ verläuft. Auf dem Standardtorus $T(\mathbf{E})$ ist $S(\mathbf{E})$ eine *Geodätische*. Die Kurve $S(\mathbf{X})$ ist also das lineare Bild einer Geodätischen. Im Falle gerader Eckenzahl zerfällt die von $S \subset T_g$ erzeugte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $T(\mathbf{X})$ in zwei geschlossene C_∞ -Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$. Dabei geht $S^+(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte von \mathbf{X} mit geradem Index und $S^-(\mathbf{X})$ durch diejenigen mit ungeradem Index. Zu einer 2-dimensionalen Untergruppe F von T_u mit $S \subset F$ gehört eine Fläche $F(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte des Polygons \mathbf{X} . Die Fläche $F(\mathbf{X})$ besitzt die topologische Struktur eines 2-Torus.

4.1. Interpolation durch eine geschlossene Kurve

Setzt man in (13) $t_j = jt, j = 1, 2, \dots, m$, dann erhält man die 1-dimensionale Untergruppe $S \subset T_u$, bestehend aus den Matrizen

$$A(t) = P_0 + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i j t} P_j + e^{-2\pi i j t} P_{-j}). \quad (70)$$

Das sind die zirkulanten Matrizen

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(t) J^k = \langle \sigma_0(t), \sigma_1(t), \dots, \sigma_{n-1}(t) \rangle \quad (71)$$

mit den Koeffizienten (s. (16))

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i j t} \lambda^{-j k} + e^{-2\pi i j t} \lambda^{j k}) \right). \quad (72)$$

Nach Ausführung der Summation ergibt sich die reelle Form

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi \left(t - \frac{k}{n} \right)}{\sin \pi \left(t - \frac{k}{n} \right)}. \quad (73)$$

der Koeffizienten $\sigma_k(t)$. Die komplexe Form (72) der Funktionen $\sigma_k(t)$ ist in der Rechnung oft vorteilhafter als die reelle Form (73).

Die Funktionen $\sigma_k(t)$ sind C_∞ -Funktionen mit Periode eins. Von den oben hergeleiteten funktionalen Eigenschaften notieren wir nur die Entsprechungen (*Zerlegung der Eins*, s. (23))

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(t) = 1 \quad (74)$$

und (s. (20))

$$\sigma_k \left(\frac{l}{n} \right) = \delta_{kl}. \quad (75)$$

Die geschlossene Kurve $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ mit der Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} X(t) &= a_0(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i j t} a_j(\mathbf{X}) + e^{-2\pi i j t} a_{-j}(\mathbf{X})) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(t) X_k, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (76)$$

geht also durch die Eckpunkte X_k des Polygons \mathbf{X} , und zwar ist

$$X \left(\frac{l}{n} \right) = X_l. \quad (77)$$

Die Kurve $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \subset T(\mathbf{X})$ stellt eine 1-dimensionale *Vérallgemeinerung* der *Steinerschen Ellipse* für den Fall beliebiger Polygone mit ungerader Eckenzahl dar. Jeder ihrer Punkte kann als ein „Mittel“ der Polygonecken gedeutet werden. Die Eckpunkte der transformierten Polygone

$$\mathbf{X}(t) = \langle \sigma_0(t), \sigma_1(t), \dots, \sigma_{n-1}(t) \rangle \mathbf{X} \quad (78)$$

liegen auf $\mathcal{S}(\mathbf{X})$. Der Schwerpunkt des Polygons $\mathbf{X}(t)$ ist der Schwerpunkt von \mathbf{X} .

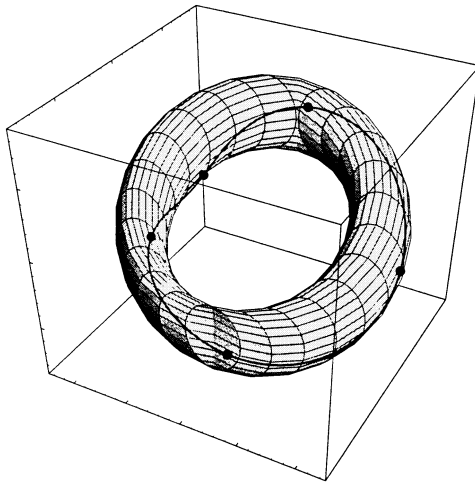


Abb. 6. Die auf der Torusfläche $T(\mathbf{X})$ verlaufende Kurve $S(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte eines räumlichen Fünfecks \mathbf{X}

Als *Tangentenvektor* an $X(t)$ im Punkt X_l ergibt sich der Vektor

$$\dot{X}\left(\frac{l}{n}\right) = \pi \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j}{\sin \frac{\pi j}{n}} (X_{l-j} - X_{l+j}). \quad (79)$$

Man erkennt die Analogie zur entsprechenden Eigenschaft der Steinerschen Ellipse. Für die transformierten Polygone $\mathbf{X}(t)$ auf $S(\mathbf{X})$ gelten wieder quadratische Invarianzbeziehungen der Form

$$\mathcal{Q}(C\mathbf{X}(t)) = \mathcal{Q}(C\mathbf{X}), \quad (80)$$

wenn C eine beliebige zirkulante (n, n) -Matrix ist.

Bemerkung: Liegen die Eckpunkte eines Polygons $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ mit ungerader Eckenzahl n in \mathbb{R} , dann löst die 1-periodische Funktion $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(t) f_k$ die gewöhnliche Interpolationsaufgabe, durch die Punkte $(\frac{k}{n}, f_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, des \mathbb{R}^2 eine glatte Kurve zu legen. Skizziert man in der Ebene oder im Raum den Verlauf einer polygonalen Kontur durch n Punkte X_k ungerader Anzahl, dann zeichnet $S(\mathbf{X})$ diese Kontur in Form einer glatten Kurve durch die Punkte X_k nach. Die Forderung n ungerade bedeutet dabei keine wesentliche Einschränkung, da der Verlauf einer solchen Kontur immer durch eine ungerade Zahl von Punkten skizziert werden kann. Es eröffnen sich somit Anwendungen im Bereich der Computergraphik. \triangle

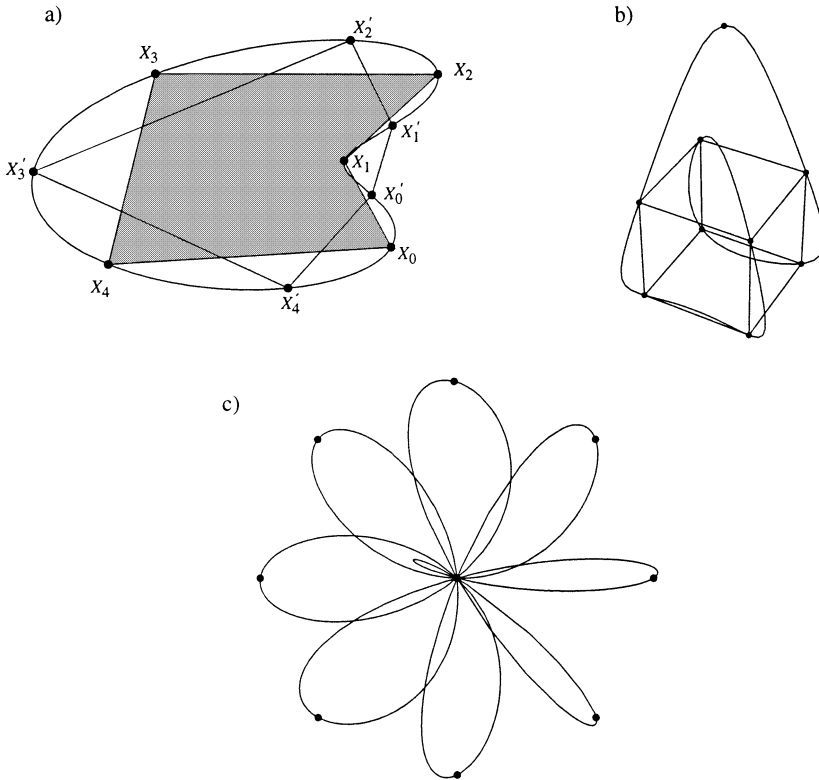


Abb. 7. Polygoninterpolation mit Hilfe der C_∞ -Kurve $S(\mathbf{X})$. (a) $S(\mathbf{X})$ im Falle eines ebenen Fünfecks $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$. Das Fünfeck \mathbf{X}' liegt im Orbit $S\mathbf{X}$. Es gilt $(X'_1 - X'_0)^2 + \dots + (X'_4 - X'_3)^2 = (X_1 - X_0)^2 + \dots + (X_4 - X_3)^2$. (b) $S(\mathbf{X})$ im Falle eines räumlichen Neunecks \mathbf{X} (c) $S(\mathbf{X})$ durch das 17-Eck $\mathbf{X} = (0, \lambda^0, 0, \lambda^5, 0, \lambda^3, 0, \lambda^1, 0, \lambda^6, 0, \lambda^4, 0, \lambda^2, \lambda^7, 0), \lambda = e^{(2\pi i/8)}$

Die sehr natürlich wirkende Verbindung der Punkte X_k durch die Kurve $S(\mathbf{X})$ läßt die Wirkung eines Minimalprinzips vermuten. Ein solches Prinzip steht tatsächlich im Hintergrund, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4: Die Kurve $S(\mathbf{E})$ durch die Punkte $E_k, k = 0, 1, \dots, n-1$, des \mathbb{R}^n ist eine Geodätische auf dem Standardtorus $T(\mathbf{E})$.

Da die Kurve $S(\mathbf{T}) \subset T(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^d$ das Bild der Geodätischen $S(\mathbf{E})$ unter der linearen Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist, die jeden Basisvektor E_k den Vektor $X_k = \alpha E_k$ zuordnet, so spiegelt sich im Verlauf von $S(\mathbf{X})$ die Minimaleigenschaft von $S(\mathbf{E})$ wieder.

Die Kurve $\mathcal{S}(\mathbf{E}) \subset T(\mathbf{E})$ mit der Parameterdarstellung $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ist eine *Geodätische* auf dem Torus $T(\mathbf{E})$, wenn der Vektor $\ddot{X}(t)$ in jedem Punkt $P \in \mathcal{S}(\mathbf{E})$ senkrecht steht zur Tangentialebene an $T(\mathbf{E})$ im Punkte P (s. [5], S. 181 ff.).

Die Kurve $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ hat die Parameterdarstellung

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(t) E_k. \quad (81)$$

Also ist

$$\ddot{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{\sigma}_k(t) E_k \quad (82)$$

mit (s. (72))

$$\ddot{\sigma}_k(t) = \frac{4\pi^2}{n} \sum_{l=1}^m l^2 (e^{2\pi i l t} \lambda^{-lk} + e^{-2\pi i l t} \lambda^{lk}). \quad (83)$$

Der Tangentialvektor im Punkte $X(\mathbf{t}) \in T(\mathbf{E})$ in Richtung t_j ist der Vektor (s. (48))

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{t}) = \frac{2\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2\pi i t_j} \lambda^{-jk} - e^{-2\pi i t_j} \lambda^{jk}) E_k. \quad (84)$$

Zu einem Kurvenpunkt (mit Parameter $t_j = jt$) gehört daher der Tangentialvektor

$$\mathbf{v}_j(t) = \frac{2\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2\pi i j t} \lambda^{-jk} - e^{-2\pi i j t} \lambda^{jk}) E_k. \quad (85)$$

Wegen $E_k \cdot E_l = \delta_{kl}$ ist daher

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t) \cdot \mathbf{v}_j(t) &= \frac{4\pi^2}{n^2} \cdot 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^m l^2 (e^{2\pi i l t} \lambda^{-lk} + e^{-2\pi i l t} \lambda^{lk}) \cdot \\ &\quad (e^{2\pi i j t} \lambda^{-jk} - e^{-2\pi i j t} \lambda^{jk}). \end{aligned}$$

Für festes l treten rechts die Summen $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{\pm k(l+j)}$ und $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{\pm k(j-l)}$ auf. Da $\lambda^{l+j} \neq (1, n)$ ist, folgt $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{\pm k(l+j)} = 0$. Die Summen des zweiten Typs sind gleich n für $l = j$ und gleich null sonst. Daher folgt

$$\ddot{X}(t) \cdot \mathbf{v}_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (86)$$

Der Vektor $\ddot{X}(t)$ steht daher senkrecht auf der Tangentialebene an $T(\mathbf{E})$ im Kurvenpunkt $X(t)$. Folglich ist $\mathcal{S}(\mathbf{E})$ eine *Geodätische* auf $T(\mathbf{E})$.

Gerade Eckenzahl

Im Fall *gerader* Eckenzahl $n = 2m + 2$ erhält man mit $t_j = jt$ und (14) die eindimensionale Untergruppe der Matrizen $A(t) \in T_g$ mit

$$A(t) = P_0 + P_{m+1} + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi ij t} P_j + e^{-2\pi ij t} P_{-j}). \quad (87)$$

Die zirkulante Matrix

$$A(t) = \langle \sigma_0(t), \sigma_1(t), \dots, \sigma_{n-1}(t) \rangle \quad (88)$$

hat die Koeffizienten (s. (18))

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{n} \left(1 + (-1)^k + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi ij t} \lambda^{-jk} + e^{-2\pi ij t} \lambda^{jk}) \right) \quad (89)$$

bzw.

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{n} \left((-1)^k + \frac{\sin \pi(n-1)(t - \frac{k}{n})}{\sin \pi(t - \frac{k}{n})} \right). \quad (90)$$

Die Funktionen $\sigma_k(t)$ bilden wieder eine *Zerlegung der Eins*. Aus (21), (22) folgt

$$\sigma_k\left(\frac{2l}{n}\right) = \delta_{k,2l} \quad (91)$$

und

$$\sigma_k\left(\frac{2l+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \begin{cases} 1 - \frac{2}{n}, & k = 2l+1 \\ (-1)^k \frac{2}{n}, & k \neq 2l+1 \end{cases} \quad (92)$$

Die Eckpunkte des transformierten Polygons $\mathbf{X}(t) = A(t)\mathbf{X}$ verteilen sich jetzt auf *zwei* geschlossene Kurven $S^+(\mathbf{X}) \subset T^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X}) \subset T^-(\mathbf{X})$ mit den Parameterdarstellungen $X^+(t) = X_0(t)$, d.h.,

$$\begin{aligned} X^+(t) &= a_0(\mathbf{X}) + a_{m+1}(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi ij t} a_j(\mathbf{X}) + e^{-2\pi ij t} a_{-j}(\mathbf{X})) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(t) X_k \end{aligned} \quad (93)$$

und $X^-(t) = X_1(t)$, d.h.,

$$\begin{aligned} X^-(t) &= a_0(\mathbf{X}) - a_{m+1}(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m (e^{2\pi i j t} a_j(\mathbf{X}) \lambda^j + e^{-2\pi i j t} a_{-j}(\mathbf{X}) \lambda^{-j}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(t) X_{k+1} \end{aligned} \quad (94)$$

Die Eckpunkte von $\mathbf{X}(t)$ mit geradem Index liegen auf $S^+(\mathbf{X})$, diejenigen mit ungeradem Index auf $S^-(\mathbf{X})$, und zwar gilt

$$X^+\left(\frac{2l}{n}\right) = X_{2l} \quad (95)$$

und

$$X^-\left(\frac{2l}{n}\right) = X_{2l+1}. \quad (96)$$

Es besteht der Zusammenhang $X^+(t) = X^-(t - \frac{1}{n}) + 2a_{m+1}(\mathbf{X})$. Die Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ gehen also durch eine Verschiebung um den Vektor $2a_{m+1}(\mathbf{X}) = \frac{2}{n}(X_0 - X_1 + \dots + X_{n-2} - X_{n-1})$ auseinander hervor. Insbesondere ergeben sich mit (92) die Beziehungen

$$X^+\left(\frac{2l+1}{n}\right) = X_{2l+1} + 2a_{m+1}(\mathbf{X}) \quad (97)$$

und

$$X^-\left(\frac{2l+1}{n}\right) = X_{2l+2} - 2a_{m+1}(\mathbf{X}). \quad (98)$$

Die Kurve $S^+(\mathbf{X})$ geht also durch die Punkte X_{2l} und $X_{2l+1} + 2a_{m+1}(\mathbf{X})$, die Kurve $S^-(\mathbf{X})$ durch die Punkte X_{2l+1} und $X_{2l} - 2a_{m+1}(\mathbf{X})$. $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ fallen zusammen, wenn $a_{m+1}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}(X_0 - X_1 + \dots + X_{n-2} - X_{n-1}) = 0$ ist, wenn also der Schwerpunkt der Punkte X_{2k} mit geradem Index gleich dem Schwerpunkt der Punkte X_{2k+1} mit ungeradem Index ist.

Beispiel 4: Im Fall des Vierecks $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ ist $m = 1$, d.h., die Torusflächen $T^+(\mathbf{X})$ und $T^-(\mathbf{X})$ fallen mit den Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ zusammen. $S^+(\mathbf{X})$ geht durch die Punkte X_0, X_2 und $S^-(\mathbf{X})$ durch die Punkte X_1 und X_3 . Mit dem Schwerpunkt als Bezugspunkt (d.h. $a_0(\mathbf{X}) = 0$) geht wegen (68), (69) $S^+(\mathbf{X})$ auch durch die Punkte $-X_1, -X_3$, und $S^-(\mathbf{X})$ geht durch die Punkte $-X_0, -X_2$.

Die Transformationsmatrix $\mathcal{A}(t) = \langle \sigma_0(t), \sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t) \rangle$ hat die Koeffizienten

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{4} \left((-1)^k + \frac{\sin 3\pi(t - \frac{k}{4})}{\sin \pi(t - \frac{k}{4})} \right) \quad (99)$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$. Für ein transformiertes Viereck $\mathbf{X}(t) = \mathcal{A}(t)\mathbf{X}$ besteht dann die Invarianzbeziehung $(X_1(t) - X_0(t))^2 + (X_2(t) - X_1(t))^2 + (X_3(t) - X_2(t))^2 + (X_0(t) - X_3(t))^2 = (X_1 - X_0)^2 + (X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2 + (X_0 - X_3)^2$ für die Seitenquadrate.

Die Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ sind *Ellipsen*, wie man der Darstellung (s. (93))

$$X^+(t) = a_0(\mathbf{X}) + a_2(\mathbf{X}) + e^{2\pi i t} a_1(\mathbf{X}) + e^{-2\pi i t} a_{-1}(\mathbf{X}) \quad (100)$$

entnimmt. Mit

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4}(X_0 + X_1 + X_2 + X_3) \\ a_2(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4}(X_0 - X_1 + X_2 - X_3) \\ a_1(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4}(X_0 - iX_1 - X_2 + iX_3) \\ a_{-1}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4}(X_0 + iX_1 - X_2 - iX_3) \end{aligned} \quad (101)$$

ergibt sich die reelle Parameterdarstellung der Ellipse $S^+(\mathbf{X})$:

$$X^+(t) = \frac{1}{2}(X_0 + X_2) + \frac{1}{2} \cos 2\pi t (X_0 - X_2) + \frac{1}{2} \sin 2\pi t (X_1 - X_3). \quad (102)$$

Entsprechend findet man

$$X^-(t) = \frac{1}{2}(X_1 + X_3) + \frac{1}{2} \cos 2\pi t (X_1 - X_3) - \frac{1}{2} \sin 2\pi t (X_0 - X_2). \quad (103)$$

als Parameterdarstellung der verschobenen Ellipse $S^-(\mathbf{X})$ (s. Abb. 8).

Die Bedingung $a_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{4}(X_0 - X_1 + X_2 - X_3) = 0$ bedeutet: Das Viereck \mathbf{X} ist ein *Parallelogramm*. Dann fallen die Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ zusammen. Die transformierten Vierecke $\mathbf{X}(t)$ aus $S^+(\mathbf{X}) = S^-(\mathbf{X})$ sind ebenfalls Parallelogramme (s. Abb. 9).

Ästhetisch ansprechende *Rosetten* lassen sich im Fall von Polygonen erzeugen, die die Bedingung $a_{m+1}(\mathbf{X}) = 0$ erfüllen (Abb. 10).

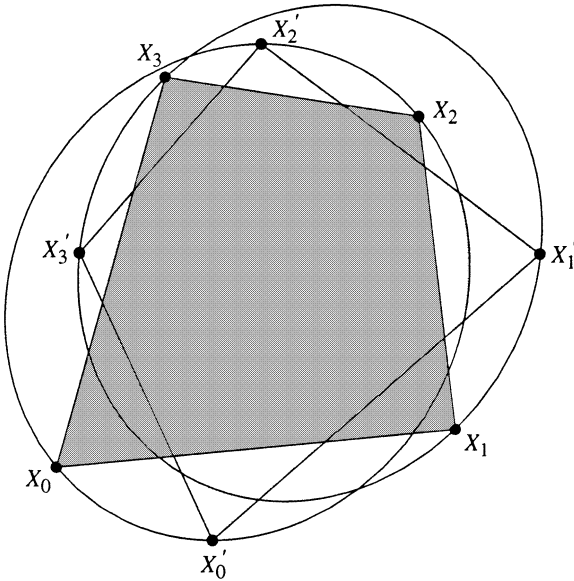


Abb. 8. Die Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ bei einem Viereck $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ sind Ellipsen; die Eckpunkte von \mathbf{X} und \mathbf{X}' liegen abwechselnd auf $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$. Das Viereck \mathbf{X}' gehört zur Bahn $S\mathbf{X}$. Es gilt $(X'_1 - X'_0)^2 + \dots + (X'_0 - X'_3)^2 = (X_1 - X_0)^2 + \dots + (X_0 - X_3)^2$

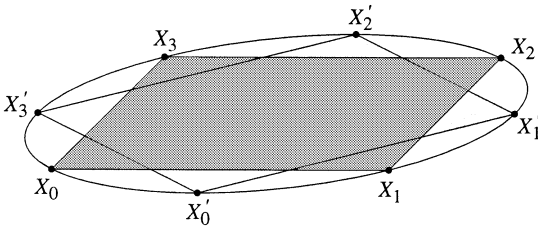


Abb. 9. Die Kurve $S^+(\mathbf{X}) = S^-(\mathbf{X})$ bei einem Parallelogramm \mathbf{X} . Das Parallelogramm \mathbf{X} gehört zur Bahn $S\mathbf{X}$

Beispiel 5: In der komplexen Ebene betrachten wir das Polygon \mathbf{X} mit den $2n$ Eckpunkten $X_{2k} = 0$ und $X_{2k+1} = \mu^k$, $\mu = e^{(2\pi i)/n}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Die zugehörigen Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ fallen zusammen, da der Punkt $z = 0$ zugleich Schwerpunkt des Teilpolygons mit den

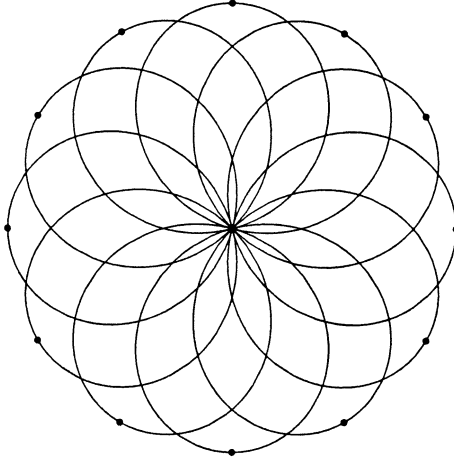


Abb. 10. Die Kurven $S^+(\mathbf{X})$ und $S^-(\mathbf{X})$ durch das ebene Polygon mit den Eckpunkten $X_{2k} = 0, X_{2k+1} = \mu^k, \mu = e^{2\pi i/12}, k = 0, 1, \dots, 11$, fallen zusammen. Sie bilden eine 12-blättrige Rosette mit der Parameterdarstellung $\tilde{z}(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi i(t-1/24)}(1 - e^{-24\pi i t})$

Eckpunkten X_{2k} und des Teilpolygons mit den Eckpunkten X_{2k+1} ist. Die Kurve $S^+(\mathbf{X})$ geht daher durch die Eckpunkte X_{2k+1} eines regelmäßigen n -Ecks und durchläuft n -mal den Punkt $X_{2k} = 0$.

Die Funktionen $\sigma_k(t)$ (vgl. (89)) haben die komplexe Darstellung

$$\sigma_k(t) = \frac{1}{2n} (1 + (-1)^k) + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} (e^{2\pi i j t} \lambda^{-j k} + e^{-2\pi i j t} \lambda^{j k}), \quad \lambda = e^{2\pi i/2n}.$$

Mit (93) erhält man dann die Parameterdarstellung

$$\tilde{z}(t) = X^+(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{2k+1}(t) \mu^k$$

der Kurve $S^+(\mathbf{X}) = S^-(\mathbf{X})$. Unter Beachtung von $\mu = \lambda^2$ ergibt sich daraus die Parameterdarstellung

$$\tilde{z}(t) = \frac{1}{2} e^{2\pi i(t-1/2n)} (1 - e^{-2\pi i n t}) \quad (104)$$

von $S^+(\mathbf{X})$ als Kurve in der komplexen Ebene.

In derselben Weise lassen sich auch Rosetten im *Raum* erzeugen, z.B., wenn das Polygon \mathbf{X} durchlaufen wird, das alternierend vom Mittelpunkt und den Eckpunkten eines Würfels gebildet wird.

4.2. Interpolation durch eine Fläche

Setzt man in (13) $t_{2j} = 2ju$ und $t_{2j+1} = (2j+1)v$, dann erhält man in den Matrizen

$$\begin{aligned} A(u, v) = & P_0 + \sum_{1 \leq 2j \leq m} (e^{4\pi i j u} P_{2j} + e^{-4\pi i j u} P_{-2j}) \\ & + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq m} (e^{2\pi i (2j+1)v} P_{2j+1} + e^{-2\pi i (2j+1)v} P_{-(2j+1)}) \end{aligned} \quad (105)$$

eine 2-dimensionale Untergruppe F der Gruppe T_u . Die diagonale Untergruppe von F , das sind die Matrizen $A(u, u)$, ist die Gruppe \mathcal{S} . Es besteht daher die Inklusion $\mathcal{S} \subset F \subset T_u$.

Die Gruppe F erzeugt eine 2-dimensionale Torusfläche $F(\mathbf{X})$ durch die Eckpunkte von \mathbf{X} . Die Koeffizienten $\sigma_k(u, v)$ ihrer Parameterdarstellung

$$X(u, v) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(u, v) X_k, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (106)$$

berechnet man mit der Formel (16). Dabei sind bei $n = 2m + 1$ die Fälle m gerade und m ungerade zu unterscheiden. Im ersten Fall ergibt sich

$$\sigma_k(u, v) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin 2\pi(m+1)(u - \frac{k}{n})}{\sin 2\pi(u - \frac{k}{n})} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin 2\pi m(v - \frac{k}{n})}{\sin 2\pi(v - \frac{k}{n})}. \quad (107)$$

Ist m ungerade, so erhält man für den entsprechenden Koeffizienten $\sigma'_k(u, v)$ die Beziehung $\sigma'_k(u, v) = \sigma_k(v, u)$.

Die algebraische Beziehung $\mathcal{S} \subset F \subset T_u$ impliziert die geometrische Beziehung $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \subset F(\mathbf{X}) \subset T(\mathbf{X})$. Gibt man in \mathbb{R}^3 also eine ungerade Zahl von Punkten vor und versieht diese mit einer Reihenfolge X_0, X_1, \dots, X_{n-1} , dann stellt $F(\mathbf{X})$ eine *Interpolation* dieser Punkte durch eine Torusfläche dar.

Die Untergruppe $F = F_2 \subset T_u$ entsteht durch Zerlegung der Indexmenge $M = \{1, 2, \dots, m\}$ in Restklassen mod 2. Die Zerlegung von M mod 3 führt entsprechend auf die Parameterwahl $t_{3j} = 3ju$, $t_{3j+1} = (3j+1)v$, $t_{3j+2} = (3j+2)w$ und damit zur 3-dimensionalen Untergruppe $F_3 \subset T_u$, bestehend aus Matrizen $A(u, v, w)$. Entsprechend führt jede Zerlegung von M mod r , $2 \leq r \leq m-1$, zu einer r -dimensionalen Untergruppe $F_r \subset T_u$ und damit zu einer r -dimensionalen Torusfläche $F_r(\mathbf{X})$. Wegen $\mathcal{S} \subset F_r$ gilt $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \subset F_r(\mathbf{X})$. Die Flächen gehen daher sämtlich durch die Eckpunkte von \mathbf{X} (Abb. 11).

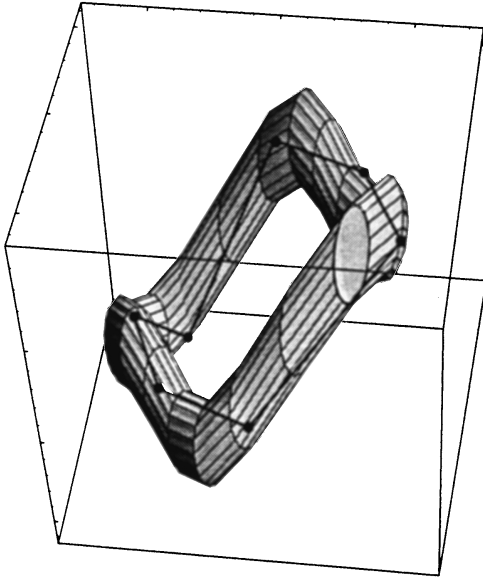


Abb. 11. Die Fläche $F(\mathbf{X})$ durch ein räumliches Siebeneck

Literatur

- [1] Berkhan, G., Meyer, W. Fr.: Neuere Dreiecksgeometrie. In: Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. III, 1.2., Leipzig 1914–1931, S. 1239ff.
- [2] Curtis, M. L.: Matrix Groups. New York, Heidelberg, Berlin 1979.
- [3] Davis, P. J.: Circulant Matrices. John Wiley & Sons, New York 1979.
- [4] do Carmo, M. P.: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. 3. Auflage, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1993.
- [5] Schuster, W.: Polygonfolgen und Napoleonsätze. Math. Semesterber. 41, 23–42 (1994).
- [6] Schuster, W.: Quadratische Identitäten bei Polygonen. Aequationes Mathematicae (1997).

Anschrift des Verfassers: Dr. W. Schuster, Deutsches Institut für Fernstudienforschung an der Universität Tübingen (DIFF), Konrad-Adenauer-Str. 40, D-72072 Tübingen.