Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 217–239

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Über Dirichletsche Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, die mit Schwingungsgleichungen verwandt sind

Von

E. Hlawka

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 19. Juni 1997
durch das w. M. Edmund Hlawka

Einleitung

Bekanntlich kann man bei der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

nur für die x-Variable Randbedingungen vorgeben, nicht aber gleichzeitig für die Zeitvariable t. An sich könnte man die Rollen von x und t vertauschen, aber es ist im allgemeinen nicht üblich, für die Zeit Randbedingungen vorzuschreiben. Tut man dies aber doch, so nennt man solche Probleme ‚ill posed problems'. Solche Probleme bei den Schwingungsgleichungen bezeichnet man heute als Dirichletprobleme bei hyperbolischen Gleichungen. Über diese Probleme wurde verschiedentlich gearbeitet, so von A. Huber, Duffin, Hornich, Fox und Pucci ([1]). Bezüglich der Arbeiten von Hornich verweise ich auf [2]. Bei allen diesen Artikeln werden Sätze aus der Theorie der diophantischen Approximationen benützt, vor allen wird ein Satz von Hardy und Littlewood über die Approximationen einer Irrationalzahl benützt. Diesen Satz habe ich vor längerer Zeit auf die Approximationen von mehreren Irrationalzahlen verallgemeinert ([3] und [4]). Die genaue

Formulierung diese Satzes siehe [3], §2, Hilfssatz, wird aber gleich wiederholt werden.

Es sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl. Weiters sei E^m der m-dimensionale Vektorraum. Unter dem Skalarprodukt $\langle ah \rangle$ zweier Vektoren

$$a = (a_1, \ldots, a_m) \quad \text{und}$$
$$h = (h_1, \ldots, h_m)$$

verstehen wir

$$\langle ah \rangle = a_1 h_1 + \cdots + a_m h_m.$$

Im weiteren ist h immer ein Gitterpunkt, d.h. ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten. Es bedeute

$$\|h\| = \text{Max}\,(|h_1|, \ldots, |h_m|).$$

Weiters sei

$$\mathrm{R}(h) = \prod_{i=1}^{m} \text{Max}\,(1, |h_i|)$$

und

$$\|\langle ah \rangle\| = \text{Min}\,(|\langle ah \rangle + h_{m+1}|),$$

wobei sich das Minimum über alle ganzen Zahlen h_{m+1} erstreckt:

$$\|\langle ah \rangle\| \leq \frac{1}{2}.$$

Wir betrachten nun m Irrationalzahlen $a_1, \ldots, a_m$, die folgende Bedingungen erfüllen. Es gibt positive Zahlen μ und c, so daß für alle ganzen Zahlen $h_1, \ldots, h_m, h = (h_1, \ldots, h_m) \neq (0, \ldots, 0), h_{m+1}$, stets

$$(\mathrm{R}(h))^{\mu} \cdot |h_1 \alpha_1 + \cdots + h_m \alpha_m + h_{m+1}| \geq c \tag{1}$$

ist. Wir sagen kurz

$$(\mathrm{R}(h))^{\mu} \cdot \|\langle ah \rangle\| \geq c.$$

Wir sagen a ist vom Typus μ (es genügt in unserem Zusammenhang die Existenz von μ und c). Es seien nun $\sigma \geq 2$ und j positive reelle Zahlen, wobei $\sigma > \mu \cdot j$, dann besagt der bereits zitierte Hilfssatz in §2 in der ersten der genannten Arbeiten des Autors, daß die Reihe

$$\sum \frac{1}{(\mathrm{R}(h))^{\mu} \|\langle ah \rangle\|^{j}} \tag{2}$$

konvergiert, wenn sich die Summation über alle Gittervektoren $h \neq (0, \ldots, 0)$ erstreckt.

Wir sagen, $a = (a_1, \dots, a_s)$ ist vom Charakter α, wenn es ein c_1 gibt, sodaß für alle ganzen $h_1, \dots, h_{m+1}$ gilt

$$\|h\|^\alpha |h_1 a_1 + \cdots + h_m a_m + h_{m+1}| \geq c.$$

Es ist dann a vom Typus $m\alpha$, da

$$(\mathrm{R}(h))^m > \|h\|.$$

Notationen

Zunächst setzen wir stets $e(\alpha) = e^{i\alpha}(i = \sqrt{-1})$. Weiters sei

$$q_{k,l}(t) = \langle ka \rangle + l \quad k = (k_1, \dots, k_m).$$

(k_j, l durchlaufen alle ganzen Zahlen, wenn nichts anderes bemerkt wird.) $C_{k,l}$ sind reelle Zahlen, wobei k und l ganze Zahlen und nicht gleichzeitig Null sind. Ferner sei

$$\langle bkx \rangle = b_1 k_1 x_1 + \cdots + b_m k_m x_m \tag{1}$$

$$\langle ak^2 \rangle = a_1 k_1^2 + \cdots + a_m k_m^2 \tag{2}$$

$$\left\langle a \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

$\left\langle a \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^j$ bedeutet den j-ten iterierten Differentialoperator. Weiter sei

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \left\langle a \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

und D^j bedeutet den iterierten Operator. Es ist

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$$

des Laplacesche Ausdruck, Δ^j ist der iterierte Ausdruck (wir werden ihn nur für $j = 2$ benötigen)

$$\square = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

§1

Wir behandeln die partielle lineare Diffentialgleichung

$$g(x, t) = \frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial s}{\partial x_i}, \tag{I}$$

kurz

$$ds = \frac{\partial s}{\partial t} dt + \left\langle a \frac{\partial s}{\partial x_j} dx_j \right\rangle = g(x,t)dt$$

mit

$$g(x,t) = \sum C_{k,l} e(\langle kx \rangle + l).$$

Wir setzen jetzt voraus, daß $a = (a_1, \ldots, a_m)$ die Bedingungen am Ende der Einleitung erfüllt und

$$|C_{k,l}| \leq \frac{C}{\mathrm{R}(k)^{\sigma} l^2},$$

wobei $\sigma > \mu$, vergleiche das Ende der Einleitung.

Die „Welle"

$$S(x,t) = \sum C_{k,l} \frac{e(\langle kx \rangle + l)}{q_{k,l}(t)}$$

ist Lösung, wie man sofort nachrechnet. Zur Bezeichnung von $q_{k,l}(t)$ siehe unter „Notationen".

Ist jetzt $\Phi(x,t)$ eine stetig differenzierbare Funktion in $x = (x_1, \ldots, x_m)$ und t, so ist

$$S + \Phi(x - \alpha t, t) \tag{II}$$

die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I).

Zur Welle S gehören die Strahlen (Charakteristiken)

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)) = \alpha t + c = (\alpha_1 t + c_1, \ldots, \alpha_m t + c_m),$$

wo die α_j Konstante sind, welche dem System

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = \alpha_j$$

genügen. Wir setzen

$$P_j = \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

und

$$P_k(t) = P_k(x(t)),$$

wo $x(t)$ ein Strahl ist. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_j}{\partial t} &= \frac{\partial^2 s}{\partial t\,\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial^2 s}{\partial x_j\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t}\\ &= \frac{\partial^2 s}{\partial t\,\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial s}{\partial x_k}\alpha_k\right) \qquad (III)\\ &= \frac{\partial^2 s}{\partial t\,\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g(x,t) - \frac{\partial s}{\partial t}\right),\end{aligned}$$

also ist

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x_j}. \qquad (IV)$$

Bei dieser Rechnung haben wir nur die Differentialgleichung (I) und $\frac{\partial x_j}{\partial t} = \alpha_j$ verwendet.

Weiters ist für $z = s(x(t), t)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} + \left\langle \alpha\,\frac{\partial s}{\partial x}\right\rangle = g(x,t).$$

Damit haben wir das volle System der Charakteristiken aufgestellt und die Lösungen existieren nach unseren Voraussetzungen und nach dem Satz am Ende der Einleitung.

Weiters sie

$$L(x,\dot{x},t) = \langle P, \dot{x} - \alpha\rangle + g(x,t)$$

und

$$H(x,P) = \langle a, P\rangle - g(x,t),$$

wo $P = (p_1, \ldots, p_m)$ zunächst unabhängige Variable sind.

Es ist

$$ds = \frac{\partial s}{\partial t}dt + \sum \frac{\partial s}{\partial x_j}\,dx_j,$$

also

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\left\langle a, \frac{\partial s}{\partial x}\right\rangle + g(x) + \sum P_k\,dx = \langle P, \dot{x} - \alpha\rangle + g(x) = L(x,\dot{x},t).$$

Es ist also

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x,\dot{x},dt) = s(x(t_1),t_1) - s(x(t_0),t_0).$$

Das Integral hängt also nicht vom Weg, sondern nur von den Endpunkten ab.

Weiters ist

$$H + L = \langle p, \dot{x} \rangle \quad \text{und} \quad P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$$

und, wie man sofort nach (*III*) und (*IV*) sieht,

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_k} \quad \text{sowie} \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\partial g}{\partial x_k},$$

also ist H die Hamilton-Funktion und L die Lagrange-Funktion zu unserer Differentialgleichung (I).

Wir kommen also zu einem ausgearteten Variationsproblem.

Ist j eine natürliche Zahl, so betrachten wir die iterierte Differentialgleichung $D^j(s) = g$, wo g diesselbe Funktion ist wie vorher. Dann ist

$$s = \sum C_{k,l} \frac{e(\langle kx \rangle + l)}{q_{k,l}(t)^j}$$

wieder eine Lösung, wenn

$$|C_{k,l}| \leq \frac{C}{\mathrm{R}(k)^\sigma l^2},$$

wo $\sigma > j\mu$, wie man sofort nachrechnet.

Betrachten wir noch

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left\langle \alpha, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle^2 s = g,$$

wo g wie vorher definiert ist, aber l nur die natürlichen Zahlen durchläuft.

Dann ist, wie man sofort durch Nachrechnen sieht,

$$s = \sum \frac{C_{k,l}}{l} \left(\frac{1}{q_{k,l}} - \frac{1}{q_{k,-l}} \right)$$

eine Lösung, wenn die Ungleichung

$$C_{k,l} \leq \frac{C}{\mathrm{R}(k)^\sigma l^2}$$

erfüllt ist.

§2

Wir behandeln nun

$$\Box\psi = \Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = g(x,t)$$

mit

$$g(x,t) = \sum D_{k,l} e(\langle kbx \rangle + lt),$$

wobei vorausgesetzt ist, daß $b_j^2 = a_j$ ist für $j = 1, \ldots, s$ und die a_j die Bedingungen des Satzes am Ende der Einleitung erfüllen.

Diese Funktion g ist periodisch in t mit der Periode 2π und in der x_i periodisch mit der Periode $\frac{2\pi}{b_j}$.

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung (I) wird nun gegeben durch

$$\phi(x,t) = \sum_{k,l} D_{k,l} \frac{e(\langle kbx \rangle + lt)}{\langle k^2 a \rangle - l^2},$$

wobei, wie man sofort durch Nachrechnen zeigt, die Reihe konvergiert, wenn die $D_{k,l}$ dem Betrage nach

$$|D_{k,l}| \leq \frac{d}{\mathrm{R}(k^2)^\sigma l^2}$$

erfüllen, wo $\sigma > \mu$.

H. Hornich hat den Fall $m = 1$ in seiner bereits eingangs zitierten Arbeit [3] nach einer anderen Methode mit Hilfe des Satzes von H. D. Littlewood behandelt, die sich allerdings nicht auf den Fall $s > 1$ übertragen läßt.

Betrachten wir jetzt z.B. den Fall $s = 3$ und die vier Funktionen g_0, g_1, g_2, g_3, wobei

$$g_j(x,t) = \sum D_{k,l}^{(j)}\, e(\langle kbx \rangle + lt),$$

wobei aber

$$l \cdot D_{k,l}^{(0)} = \sum_{j=1}^{3} k_j D_{k,l}^{(j)}.$$

Betrachten wir die zugehörigen Funktionen $\phi(j), j = 0, \ldots, 3$, so erfüllen die Vektoren $E = (E_1, E_2, E_3)$ und $H = (H_1, H_2, H_3)$ mit

$$E_j = \frac{\partial\phi_0}{\partial x_j} - \frac{\partial\phi_j}{\partial t}, \quad j = 1, 2, 3,$$

und

$$H_1 = \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} \quad H_2 = \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \quad H_3 = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}$$

die Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{div} E = d_0 = \rho \quad (\text{Ladungsdichte}), \quad \operatorname{div} H = 0$$

$$\operatorname{rot}\ E + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot}\ H = \frac{\partial E}{\partial t} + j,$$

wobei $j = -(g_1, g_2, g_3)$ die Stromdichte ist. Dabei bedeutet die vorhergehende Beziehung für die D, daß die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0 \quad (\text{Lorenzbedingung})$$

erfüllt ist.

Wir haben damit also ein periodisches elektromagnetisches Feld mit den Perioden $\frac{2\pi}{b_1}, \frac{2\pi}{b_2}, \frac{2\pi}{b_3}$ in x_1, x_2, x_3 und periodisch in der Zeit t mit der Periode 2π konstruiert.

Betrachten wir die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = g(x,t),$$

wo $g(x,t)$ wie vorher definiert ist, so erhalten wir sofort als periodische Lösung

$$T = -\sum D_{k,l} \frac{e(\langle kbx\rangle + lt}{\langle k^2 a\rangle - l}.$$

Betrachten wir die inhomogene Plattengleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \Delta\Delta T = g(x,t),$$

so erhalten wir als Lösung

$$\phi(x,t) = \sum D_{k,l} \frac{e(\langle kbx\rangle + lt)}{(\langle k^2 a\rangle)^2 - l^2}.$$

Es ist

$$\frac{1}{(\langle k^2 a\rangle)^2 - l^2} = \left(\frac{1}{\langle k^2 a\rangle - l} - \frac{1}{\langle k^2 a\rangle + l}\right)\frac{1}{2l},$$

sodaß der Satz am Ende der Einleitung anwendbar ist. Wir nehmen natürlich (wie immer) an, daß $l \neq 0$ ist.

§3

Wir gehen nun zum Höhepunkt der Untersuchungen über. Wir betrachten nun das Dirichlet-Problem

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_r^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_r^2} \quad \text{für } r = 1, \ldots, s. \tag{1}$$

Der Fall $r = 1$ wurde, wie schon in der Einleitung hervorgehoben, von verschiedenen Autoren behandelt.

Wir schreiben nun kurz

$$t = (t_1, \ldots, t_s) \quad x = (x_1, \ldots, x_s). \tag{2}$$

Mehrzeitige Theorien wurden vor allem vom Physiker P. M. Dirac behandelt. Auch andere Autoren haben sich damit beschäftigt. Die Entwicklungen, die jetzt angestellt werden sollen, wurden durch diese Untersuchungen inspiriert.

Wir führen zunächst „Oszillatoren“

$$Q_k(t) = \frac{\sin \pi \langle k t \rangle}{\sin \pi \langle k a \rangle} \tag{3}$$

ein, wo a wieder die Voraussetzungen des Satzes am Ende der Einleitung erfüllt. Mit

$$\hat{Q}_k(t) = 1 - Q_k(t) \tag{4}$$

ist

$$Q_k(0) = 0 \, Q_k(a) = 1$$

bzw.

$$\hat{Q}_k(0) = 1 \, \hat{Q}_k(a) = 0.$$

Die Oszillatoren sind periodisch mit der Periode 2 in jeder Zeitkoordinate t_j.

Weiters gilt noch

$$\frac{\partial^2 Q_k}{\partial t_j^2} + (\pi k_j)^2 Q_k = 0. \tag{5}$$

Das gilt trivialerweise auch für die $\hat{Q}_k$.

Es ist

$$|\sin \pi \langle ka \rangle| = \sin \pi ((\langle ka \rangle)) \geq \frac{2\|\langle ka \rangle\|}{\pi},$$

also

$$|Q_k| \leq \frac{1}{2}((\langle ka \rangle)).$$

Es seien nun weiter l Funktionen in k und x

$$U^{(1)}(k, x), \ldots, U^{(l)}(k, x) \tag{6}$$

gegeben, wo ausnahmsweise der Index k gleich $k_1, \ldots, k_m$ im Funktionszeichen erscheint, also ausführlich geschrieben

$$U^{(j)}(k_1, \ldots, k_m, x_1, \ldots, x_m). \tag{6'}$$

Wenn wir das System

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_j^2} = C_1^2 \partial^2 \Phi \partial x_j^2$$

haben, so ist $\langle kt \rangle$ durch $\langle kt' \rangle$ zu ersetzen, wo $t' = (c_1 t_1, \ldots, c_s t_s)$ ist.

Diese Funktionen seien in jeder Raumkoordinate x_j periodisch mit der Periode 2 und erfüllen die Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_r^2} + (\pi k_r)^2 U = 0 \tag{7}$$

Beispiel 1. $l = s, U^{(r)}(k, x) = \sin \pi k_r x_r$ oder $l = 1,\ U(k, x) = \sin \pi k_1 x_1 \ldots \sin \pi k_s x_s$ (eingespannte Saite).

Beispiel 2. $l = s,\ U^{(r)}(k, x) = \cos b k_r x_r$ (stehende Welle).

Wir bilden nun die Funktionen

$$U(x, t) = \sum_k Q_k \sum_{r=1}^{l} C_k^{(r)} U^{(r)}(k, x) \quad \text{mit} \quad |C_k^{(r)}| \leq \frac{C}{\mathrm{R}(k)^\sigma} \tag{8}$$

und

$$V(x, t) = \sum_k \hat{Q}_k \sum_{r=1}^{l} D_k^{(r)} U^{(r)}(k, x) \quad \text{mit} \quad |D_k^{(r)}| \leq \frac{D}{\mathrm{R}(k)^\sigma}, \tag{8'}$$

wobei in beiden Fällen $\sigma > \mu$ gelte.

Der Satz am Ende der Einleitung kann nach den vorhergehenden Überlegungen angewendet werden.

Wir bezeichnen mit

$$W(t,x) = U(t,x) + V(t,x). \tag{9}$$

Wir stellen sofort folgendes fest: Die Funktionen U, V, W erfüllen das System der Differentialgleichungen §3 (1), es ist

$$U(0,x) = 0, \quad U(a,x) = B(x) = \sum_{k,r} C_k^{(r)} U^{(r)}(k,x), \tag{10}$$

die Funktion V erfüllt an der Stelle $t = 0$ $V(a,x) = 0$ und

$$V(0,x) = A(x) = \sum_k D_k^{(r)} U^{(r)}(k,x), \tag{11}$$

also erfüllt die Funktion $W(x,t)$ an der Stelle $t = 0$ $A(x)$ und an der Stelle $t = a$ $B(x)$.

Weiters sind die Funktionen U, V, W sowohl in der Zeitkoordinate als auch in den Raumkoordinaten periodisch mit der Periode 2. Damit erfüllt also die Funktion die vorgeschriebene Randbedingung in der Zeit.

Jetzt können wir für die Raumfunktion $U_k^{(r)}(x)$ Randbedingungen vorschreiben: z.B. daß für die Funktion $U_k^{(r)}$

1. alle U_k an den Stellen x_0 verschwinden, wo die Koordinaten von $x_0 = 0$ oder 1 sind (eingespannte Saite)

2. die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_k^{(r)}}{\partial x_j}$ an der Stellen $x_0 = 0$ sind (stehende Welle).

Wir können uns noch mit einem gewissen Spielraum die Funktionen $B(x)$ und $A(x)$ vorgeben, indem wir sie nach Fourierschen Reihen entwickeln, die allerdings noch den Voraussetzungen über die C_k und B_k entsprechen müssen.

Wir erhalten neue Lösungen unseres Systems (1), wenn wir die Lorenztransformation anwenden

$$x_j = \frac{x_j' - v_j t_j'}{\sqrt{1 - v_j^2}} \quad t_j = \frac{-v_j x_j' + t_j'}{\sqrt{1 - v_j^2}}, \tag{12}$$

wobei die Lichtgeschwindigkeit c als Einheit genommen ist und die Geschwindigkeit $0 \leq v_j < 1$ sind.

Die Randbedingungen werden auch transformiert, so lautet z.B. jetzt die Randbedingung für $x_j = 0$

$$x_j' = v_j t_j' \quad \text{(Fall1)}. \tag{13}$$

Kehren wir zu den Koordinaten $x_j t_j$ zurück, so können wir in diesen s Welten $x_1, t_1, \ldots, x_s, t_s$ elektromagnetische Felder einführen, wobei das elektromagnetische Feld E_{j3} gegeben ist durch

$$E_{s_3} = -\frac{\partial W}{\partial t_s} \quad \text{das magnetische Feld durch} \quad H_{s_2} = \frac{\partial W}{\partial x_s}. \tag{14}$$

Wir wollen noch den Fall der Batemangruppe betrachten

$$x_k = \frac{y_k}{y_k^2 - \tau_k^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y_k - \tau_k} + \frac{1}{y_k + \tau_k}\right)$$
$$t_k = \frac{\tau_k}{y_k^2 - \tau_k^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y_k - \tau_k} - \frac{1}{y_k + \tau_k}\right)$$

für $k = 1, \ldots, s$.

Man erhält nach einiger Rechnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_k^2} = (y_k^2 - \tau_k^2)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_k^2}\right).$$

Es ist also

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x_1, t_1, \ldots, x_s, t_s) \\ &= u\left(\frac{y_1}{y_1^2 - \tau_1^2}, \frac{\tau_1}{y_1^2 - \tau_1^2}, \ldots, \frac{y_s}{y_s^2 - \tau_s^2}, \frac{\tau_s}{y_s^2 - \tau_s^2}\right) \\ &= u'(x_1, \tau_1, \ldots, y_s, \tau_s) = (u' y, \tau), \end{aligned}$$

wenn $u(x,t)$ eine Lösung des Systems (8), (8') ist. So ist $u'(x, \tau)$ eine Lösung des transformierten Systems

$$\frac{\partial^2 u'(y,\tau)}{\partial y_k^2} = \frac{\partial^2 u'(y,\tau)}{\partial \tau_k^2}$$

an den Stellen $y_k^2 \neq \tau_k^2$ für $k = 1, \ldots, s$.

Man kann die bisherigen Lösungen, die von $x_1, \ldots, x_s$ abhängen, aufblasen, so daß sie Lösungen der Wellengleichung

$$\Delta_j u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_j^2}$$

für $j = 1, \ldots, s$ werden. Wir benützen orthogonale Transformationen $O_1, \ldots, O_s$, wobei

$$O_j = \begin{bmatrix} O^j_{11} & O^j_{12} & O^j_{13} \\ O^j_{21} & O^j_{22} & O^j_{23} \\ O^j_{31} & O^j_{32} & O^j_{33} \end{bmatrix}.$$

Die Transformationen lauten dann

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} = O_j \begin{bmatrix} \xi_j \\ \eta_j \\ \zeta_j \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten dann Lösungen von der Gestalt

$$\sum_{k_1,\dots,k_s} \frac{\sin(k_1 t_1 + \cdots + k_s t_s)}{\sin(k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s)R(k)} \prod_{j=1}^{s} \sin\pi\,[o^j_{11}\xi_j + o^j_{12}\eta_j + o^j_{13}\zeta_j).$$

Es wird nämlich

$$\Delta_j u = ((o^j_{11})^2 + (o^j_{12})^2 + o^j_{13})^2)\,\frac{\partial u}{\partial x_j^2},$$

also

$$\Delta_u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Es kommen aber dazu auch Gleichungen für $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta_i\partial\eta_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j} = 0.$$

Wir betrachten nun das Produkt D der Drehungen $D_1, \dots, D_k, \dots, D_s$ in den Räumen $R_1 = (x_1, y_1, z_1), \dots, R_s = (x_s, y_s, z_s)$, wobei D_k die Drehung in R_k:

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k \cos\delta_k + \eta_k \sin\delta_k \\ y_k &= -\xi_k \sin\delta_k + \eta_k \cos\delta_k \\ z_k &= \qquad\qquad\qquad\qquad \zeta_k \end{aligned}$$

(δ_k ist der Drehwinkel von D_k) und die Spiegelung $D^* = D_1^* \dots D_s^*$ im R_k, wobei D_k^*:

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k \cos\delta_k + \eta_k \sin\delta_k \\ y_k &= -\xi_k \sin\delta_k + \eta_k \cos\delta_k \quad . \\ z_k &= \qquad\qquad\qquad\qquad \zeta_k \end{aligned}$$

Es sei $W(x,t) = W(x_1, t_1, \dots, x_s, t_s)$ eine der Lösungen, wie wir sie vorher betrachtet haben. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} W(\delta_1, t_1, \dots, \delta_s, t_s) &= W(\xi_1 \cos\delta_1 + \eta_1 \sin\delta_1, t_1, \dots, \xi_s \cos\delta_s \\ &\qquad + \eta_s \sin\delta_s, t_s) \\ W^*(\delta_1, t_1, \dots, \delta_s, t_s) &= W(-\xi_1 \cos\delta_1 + \eta_1 \sin\delta_1, t_1, \dots, \\ &\qquad - \xi_s \cos\delta_s + \eta_s \sin\delta_s, t_s). \end{aligned}$$

Wir setzen weiter

$$W_k^1 = -\sin\delta_k W(\delta_1, t_1, \dots, \delta_s, t_s), \quad W_k^2 = \cos\delta_k W(\delta_1, t_1, \dots, \delta_s, t_s),$$

dann betrachten wir die Vektoren im R_k

$$\begin{aligned} \vec{E}_k &= (W_k^1, W_k^2, 0) \\ \vec{H}_k &= (0, 0, W), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \vec{E}_k^* &= (-\sin\delta_k W^*,\ \cos\delta_k W^*, 0) \\ \vec{H}_k^* &= (0, 0, W^*). \end{aligned}$$

Sie sind Lösungen der Maxwellschen Gleichung.

Es ist also für $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$

$$\begin{aligned} \vec{E}_k + \vec{E}_k^* &= [-2\sin\delta_k \overline{W}, 0, 0] \\ \vec{H}_k + \vec{H}_k^* &= (0, 0, 2\overline{W}], \end{aligned}$$

wo

$$\overline{W}(\delta_1, t_1, \dots, \delta_s, t_s) = W(\eta_1 \sin\delta_1, \dots, \eta_s \sin\delta_s, t_s).$$

Wir können auch in jeder dieser Welten schwache Gravitationsfelder einführen, indem wir die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen hernehmen mit dem Ansatz

$$g_{lm} = \eta_{lm} + 2\psi_{lm}$$

(vergleiche das Buch von R. Sexl und Urbantke über allgemeine Relativitätstheorie), wobei die ψ_{lm} nur von x und t abhängen und solche W-Reihen sind, wie wir sie definiert haben. Nur müssen dann die Koeffizienten C und D noch zusätzliche Indizes l und m tragen.

Diese s Welten und ihre Felder sind verbunden durch jene Koeffizienten C_k und D_k, bei denen mindestens zwei Indizes k_r und k_s von 0 verschieden sind, die allerdings beliebig klein gewählt werden können, sodaß diese Welten sehr wenig voneinander wissen. Im Extremfall, daß solche Koeffizienten 0 sind, sind die s Welten voneinander getrennt und wissen nichts voneinander. Trotzdem kann jemand, der diese s Welten von außen ansieht, sie gleichzeitig betrachten, indem er sie zu einer Zeit $T = t_1 = \cdots = t_s$ ansieht.

Man kann auch ohne Aufblasen Lösungen, welche $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$ enthalten, aufstellen.

Es seien $v_j(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$ für $j = 1, \ldots, s$ Lösungen der Helmholtzgleichungen

$$\Delta_j v_j + k_j^2 v_j = 0,$$

wo Δ_j der Laplaceoperator in den Variablen ξ_j, η_j, ζ_j ist, dann ist

$$\begin{aligned} & u(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t_1, \ldots, \xi_s, \eta_s, \zeta_s, t_s) \\ & \quad = \sum_k c_k \frac{\sin \pi \langle k(ct - \alpha) \rangle}{R\sigma(k) \sin \pi \langle k\alpha \rangle} v_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \ldots, v_s(\xi_s, \eta_s, \zeta_s), \end{aligned}$$

wobei der Vektor $k(ct - \alpha)$ für $j = 1, \ldots, s$ die Komponenten $k_j(ct_j - \alpha_j)$ hat.

Es ist u Lösung des Systems $(j = 1, \ldots, s)$

$$c_j^2 \Delta_j u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_j^2}.$$

Die Grundlösung der j-ten Helmholtzgleichung ist bekanntlich

$$v_j = \frac{e^{ik_j v_j}}{r_j},$$

wo $r_j = (\xi_j^2 + \eta_j^2 + \zeta_j^2)^{\frac{1}{2}}$ ist. Mit ihr kann man bekanntlich weitere Lösungen der Helmholtzgleichung erhalten.

Es erfüllt u an der Stelle

$$t_1 = \frac{a_1}{c_1}, \ldots, t_s = \frac{a_s}{c_s}$$

die Randbedingung $u = 0$.

Kehren wir zum Fall (9) zurück und setzen für alle j

$$t_j = \beta_j t + \gamma_j,$$

so ist

$$\hat{W}(t) = W(x_1, \beta_1 t + \gamma_1, \ldots, \beta_s t + \gamma_s)$$

Lösung von

$$\frac{d^2\hat{W}(t)}{dt^2} = \sum_{i,j=1}^{s} \frac{\partial^2 W}{\partial t_i \partial t_j} \beta_i \beta_j.$$

Da

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j},$$

so ist

$$\frac{d^2\hat{W}(t)}{dt^2} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} \beta_i \beta_j.$$

Nehmen wir für alle j

$$\beta_j = c_j,$$

so ist

$$\frac{d^2\hat{W}(t)}{dt^2} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} c_i c_j.$$

Wenn die $\beta_1, \ldots, \beta_s$ linear unabhängig mod 1 sind, so liegt die Bahn $(\beta_1, \ldots, \beta_s)t$ mod 1 im Würfel $0 \leq t_1 < 1, \ldots, 0 \leq t_s < 1$ überall dicht, ja sogar gleichverteilt.

Der Fall, daß dies für die Geschwindigkeiten $c_1, \ldots, c_s$ gilt, ist besonders interessant.

Das könnte man alles noch weiter diskutieren. Allerdings erhält man, wenn man die Koordinaten x_i und x_j vertauscht, im allgemeinen ein neues Gleichungssystem mit neuen Lösungen. Also sind das Gleichungssystem und seine Lösungen nicht invariant gegenüber der Vertauschung der Indizes der x oder der t allein.

Das führt uns zu einer neuen Überlegung, die wir nun in §4 behandeln.

§4

Wir behalten die Bezeichnungen von §3 bei. Wir wollen jetzt die Funktionen $U^r(k, x)$, ausführlich geschrieben $U^{(r)}(k_1, \ldots, k_m, x_1, \ldots, x_m)$, symmetrisieren:

Ist $P_k(k_{i_1}, \ldots, k_{i_m})$ eine Permutation von $k = (k_1, \ldots, k_m)$, so bilden wir

$$\tilde{U}^{(r)}(k, x) = \frac{1}{m!} \sum_P U^{(r)}(Pk, x),$$

wo sich die Summe über alle Permutationen P erstreckt. Ist z.B.

$$U^{(r)}(k, x) = \sin \pi k_r x_r,$$

dann ist

$$\tilde{U}^{(r)}(k, x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sin \pi k_j x_j.$$

Diese $\tilde{U}$ erfüllen natürlich auch die Randbedingungen in x. Wir konstruieren die zugehörigen Funktionen U, V, W, indem wir die U durch $\tilde{U}$ ersetzen und erhalten die Funktionen $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$. Diese Funktionen genügen jetzt der Diffentialgleichung

$$\Delta_x \tilde{W} = \Delta_t \tilde{W},$$

ausführlich geschrieben

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_s^2} = \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t_s^2}. \qquad (I)$$

Das gleiche gilt natürlich für $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$.

Man nennt solche Gleichungen ultrahyperbolische Differentialgleichungen. Es sei verwiesen auf Kap. 6, §7 in [5], insbesondere auf die dort zitierte Arbeit von F. John, der den Fall $s = 2$ ausführlich behandelt. Er betrachtet aber nicht unsere „Schlangenfunktionen".

Diese Gleichungen sind schon nach der Konstruktion invariant nicht nur gegenüber der Lorenztransformation, sondern der gesamten Poincarétransformation, wozu natürlich auch die orthogonalen Transformationen gehören.

Jetzt erhält man bei Vertauschung von zwei Zeiten t_i und t_j wieder eine Lösung von (1). Man kann sogar die Lösungen stetig ineinander überführen, wenn man z.B. folgende Drehung mit dem Drehwinkel φ einführt:

$$t_i = t'_i \cos \varphi + t'_j \sin \varphi$$
$$t_j = t'_i \sin \varphi + t'_j \cos \varphi.$$

Für $\varphi = 0$ erhält man z.B. $t'_i = t_i$, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $t_i = t'_j$, für $\varphi = \pi$ wird $t'_i = -t_i$, man ist also in seine eigene Vergangenheit zurückgekehrt. Für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ist man in der Vergangenheit von t_j und für $\varphi = 2\pi$ ist man in stetiger Weise wiedergekehrt, dazwischen gibt es alle Zwischenzustände.

(Damit glaube ich ein Versprechen, das ich Frau Lotte Ingrisch gegeben habe, eingelöst zu haben, der ich für Diskussionen über die Zeit herzlich danke).

Gleichzeitig mit der Differentialgleichung (1) betrachten wir im projektiven Raum die $2s-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M\,:\,(x^2-t^2)=0$, ausführlich geschrieben

$$M\,:\,(x_1^2+\cdots+x_m^2=t_1^2+\cdots+t_m^2).$$

Wir denken uns die homogenen Koordinaten x und t so normiert, daß $x^2+t^2=1$. Dann schreibt sich M $x^2=t^2=\frac{1}{2}$. Für den Fall $s=2$ ist es ein einschaliges Hyperboloid. Es war F. John, der in seiner Arbeit auf den Zusammenhang von (1) und (2) hingewiesen hat.

Auf M liegen zwei Scharen von Hyperebenen (für $s=2$ sind das Geradenscharen des Hyperboloids)

$$x=S\tau,\quad t=\tau,$$

wo S eine orthogonale Matrix von s Spalten $o_1,\ldots,o_s$ ist. Es lautet $x=S\tau$ ausführlich geschrieben

$$x=o_1\tau_1+\cdots+o_s\tau_s.$$

Die zweite Schar lautet

$$x=\xi,\quad t=S_1\xi,$$

wo S_1 wieder eine orthogonale Matrix ist.

Wir können jetzt folgende Radontransformation betrachten (ich verweise auf meine Arbeit zur Radontransformation I und II)

$$J(\tilde{W})\,(\tau_1)=\int\tilde{W}(o_1\tau_1+\cdots+o_s\tau_s)\,d\tau_2\ldots d\tau_s,$$

wo der Integralbereich gleich ist $\tau_1^2+\cdots+\tau_s^2\leq T^2$.

Wir nehmen z.B. $T=1$, denn unsere Funktionen $\tilde{U}$ verschwinden ja der Stelle 1 und haben die Periode 2. Es würde jetzt also keinen Sinn haben, $T=\infty$ zu nehmen.

Es wäre interessant, dies alles explizit durchzuführen. Wir können (I) auch so schreiben

$$\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_r^2}-\frac{\partial^2}{\partial t_r^2}\right)\tilde{W}=0.$$

Wir setzen $u^{(r)}=x_r+t_r$ und $v^{(r)}=x_r-t_r$, dann schreibt sich unsere Differentialgleichung

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial u^{(r)}\partial v^{(r)}}=0,$$

und es ist

$$Z(u,v)=\tilde{W}\left(\frac{u+v}{2}\right),\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Die Mannigfaltigkeit M schreibt sich jetzt

$$u_1 v_1 + \cdots + u_m v_m = 0.$$

(Der Fall $m = 2$ wurde von G. Hamel in seiner Dissertation als Umkehrproblem in der Variationsrechnung aufgestellt). Geben wir dazu ein einfaches Beispiel:

Es sei g eine Gerade im R^3, gegeben durch zwei Punkte X und Y, dann betrachten wir seine Geradenkoordinaten

$$\vec{p} = X - Y \; \vec{q} = X \times Y \quad \text{(Vektorprodukt)}.$$

Es ist natürlich $\vec{p} \times \vec{q} = 0$ oder in den Koordinaten u und v geschrieben $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$. $\vec{p}$ und $\vec{q}$ erfüllen die Mannigfaltigkeit M für $s = 3$ in der uv-Gestalt, wie bekannt ist, wobei jetzt

$$u = \tfrac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}), \quad v = \tfrac{1}{2}(\vec{p} - \vec{q}).$$

Es wird also jetzt durch Z eine Funktion definiert auf allen Geraden des R^3. Damit ist auch die Radontransformation für alle Geraden des R^3 definiert. Jetzt schließt sich unmittelbar das Studium der Funktion Z längs eines vorgegebenen Linienkomplexes an, dies wird bei späterer Gelegenheit fortgeführt.

§5

Wir können die Reihen in §3 in einen größeren Zusammenhang stellen. Dazu betrachten wir mehrfache Lambertsche Reihen, wie ich sie z.B. in der Arbeit [8] behandelt habe und zwar betrachte ich als Beispiel die Reihe

$$F(a, b) = \sum_k c_k \frac{q^{2k} e(-\pi i \langle kt \rangle) - e(\pi i \langle kt \rangle)}{1 - q^{2k}} \sin k_1 x_1 \cdot \ldots \cdot \sin k_s x_s. \tag{1}$$

Dabei sei

$$q = (q_1, \ldots, q_s)$$

$$|q_1| < 1, \ldots, |q_s| < 1$$

(q_j können auch komplexe Zahlen sein: $q_j = r_j e(\pi i \beta_j)$).

$$k = (k_1, \ldots, k_s)$$

durchlaufe alle Gitterpunkte im R^s und es sei $\sum c_k$ absolut konvergent. Sind nun die $\beta_1, \ldots, \beta_s$ gerade die $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, die wir in §3 betrachtet haben und gilt ($\sigma > \mu$)

$$|c_k| < \frac{c}{\mathrm{R}(k)^\sigma}, \tag{2}$$

dann existiert, wenn $r = (r_1, \ldots, r_s)$ gegen 1 geht, der Limes

$$\lim_{r \to 1} F(q,t) = \sum c_k \frac{\sin \pi \langle k, t - \alpha \rangle}{\sin \pi \langle k\alpha \rangle} \sin \pi k_1 x_1 \ldots \sin \pi k_s x_s. \tag{3}$$

Für $t = 0$ ist, wenn stets $q^{2k} \neq 1$ ist,

$$F(q,0) = \sum c_k \sin \pi k_1 x_1 \ \ldots \sin \pi k_s x_s.$$

Man stellt weiter fest, daß $F(q,t)$ dem System

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t_j^2} \quad (j = 1, \ldots, s)$$

genügt.

Wir erhalten eine Lösung des Systems

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_j^2} = \pi \sqrt{-1}\, \frac{\partial G}{\partial t_j} \quad (j = 1, \ldots, s)$$

(also eines Systems von Schrödingergleichungen), wenn wir (3) durch die Reihe (beachte Notationen (2))

$$L(x,t) = \sum c_k \frac{\sin \pi \langle k(x - \alpha) \rangle}{\sin \pi \langle k\alpha \rangle}\, e^{i\pi \langle tk^2 \rangle} \tag{4}$$

ersetzen, wobei für Koeffizienten c_l wieder (2) gelten soll. Es ist

$$L(\alpha, t) = 0$$
$$L(\alpha, t) = \sum c_k e^{i\pi \langle tk^2 \rangle}.$$

Man kann die Dichte

$$\rho(x,t) = |F(x,t)|^2$$

betrachten. Wir erhalten z.B., wenn wir der Einfachheit halber $s = 1$ annehmen

$$\int_0^\alpha \rho(x,t)\, dx = \sum \frac{|c_k|^2}{(\sin \pi k\alpha)^2} \left(\alpha + \frac{\sin 2\pi \alpha k}{2k} \right)$$
$$+ \sum_{k \neq l} c_k c_l \left(\frac{\sin(k-l)\pi\alpha}{k-l} + \frac{\sin(k+l)\pi\alpha}{k+l} \right) \frac{\cos \pi t(k^2 - l^2)}{\sin \pi k\alpha \sin \pi l\alpha}.$$

Führen wir die Stromdichte

$$s = \sum c_k c_l \left(\frac{\sin \pi (k-l)(x-\alpha)}{k-l} - \frac{\sin \pi (k+l)(x-\alpha)}{k+l} \right) \times \frac{e^{i\pi(k^2-l^2)t}}{\sin \pi k\alpha \sin \pi l\alpha}$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial s}{\partial x}$$

und $v = \frac{s}{\rho}$ können wir als Geschwindigkeit der Strömung auffassen (vgl. die Arbeit des Verfassers [6]).

§6

Es ist interessant, eine 'Greensche' Funktion

$$G(t) = \sum_k Q_k(t) = \sum_k \frac{\sin \langle kt \rangle \pi}{\sin \langle k\alpha \rangle \pi} \tag{5}$$

einzuführen. Man kann G als Distribution einführen (vgl. [1]). Wir betrachten dazu noch

$$G^{-l}(t) = \sum_k \frac{\sin \pi \langle kt \rangle}{\mathrm{R}^l(k) \sin \pi \langle k\alpha \rangle}, \tag{6}$$

wo l gerade ist. Es sei nun φ eine Funktion von der Gestalt

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_s) = \sum_k c_k \sin \pi k_1 x_1 \ldots \sin \pi k_s x_s.$$

Es wird dann

$$\varphi_l(x) = \frac{\partial^{ls} \varphi}{\partial x_1^l \ldots \partial x_s^l} = \pi^{ls} \sum_k \mathrm{R}(k)^l c_k \sin \pi k_1 x_1 \ldots \sin \pi k_s x_s.$$

Es werde nun vorausgesetzt, daß $l > \mu$ ist und

$$\sum \mathrm{R}^l(k) c_k < \infty$$

ist. Dann bilden wir

$$U(x,t) = \int_0^1 d\tau_1 \ldots \int_0^1 d\tau_s \psi_l(\tau_1, \ldots, \tau_s) \sum (x, t, \tau), \tag{7}$$

wobei

$$\sum\left(x, t, \tau\right) = \sum_{\epsilon} G^{-l}(t + \epsilon(x - t)\Big)\operatorname{sgn}\epsilon$$

und $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s)$ mit $\epsilon_j = 1$ oder -1 ist. Es gibt $2s$ solcher Vektoren. Es ist $\operatorname{sgn}\epsilon = \epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_s$ und

$$\epsilon(x - \tau) = (\epsilon_1(x_1 - \tau_1), \ldots, \epsilon_s(x_s - \tau_s)).$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}&\sin\pi(\langle k(t + \epsilon(x - \tau))\rangle) - \sin\pi(\langle k(t - \epsilon(x - \tau))\rangle)\\ &\quad = 2\sin\pi\langle kt\rangle\cos\pi\langle k\epsilon(x - \tau)\rangle.\end{aligned}$$

Weiters ist

$$\sum_{\epsilon}\cos\pi\langle k\epsilon(x - \tau)\rangle,$$

wo sich die Summe über alle ϵ mit $\operatorname{sgn}\epsilon = +1$ erstreckt, gleich

$$\cos\pi k_1(x_1 - \tau_1)\ldots\cos\pi k_s(x_s - \tau_s)$$

wie man durch vollständige Induktion nach s zeigt, wenn man die Formel $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\ \alpha\ \cos\beta$ benützt. Wir erhalten also

$$\sum(x, t, \tau) = \frac{\sin\pi\langle kt\rangle}{\sin\pi\langle k\alpha\rangle}\cos\pi k_1(x_1 - \tau_1)\ldots\cos\pi k_s(x_s - \tau_s).$$

Damit wird

$$U(x, t) = \sum_{k,m}\frac{\sin\pi\langle kt\rangle}{\sin\pi\langle k\alpha\rangle}B_{km}\left(\frac{\mathrm{R}(m)}{\mathrm{R}(k)}\right)^l C_m\pi^{ls},$$

wobei

$$B_{km} = \prod_{j=1}^{s}\int_0^1 d\tau_j\cos\pi k_j(x_j - \tau_j)\sin\pi m_j\tau_j.$$

Es ist nun

$$2\int_0^1 d\tau\cos\pi k_j(x_j - \tau_j)\sin\pi m\tau_j\, d\tau_j = 0,$$

wenn $k \neq m$, und für $k = m$ ist

$$2\int_0^1 d\tau(\sin(k_j x_j)\pi - \sin\pi\left(k_j(x_j - 2\tau_j)\right)) = 2\sin\pi k_j x_j.$$

Wir erhalten also

$$U(x,t) = \sum_{k} \frac{\sin \pi \langle k t \rangle}{\sin \pi \langle k \alpha \rangle} \sin \pi k_1 x_1 \dots \sin \pi k_s x_s,$$

das Resultat, welches wir schon in §3 erhalten haben.

Führen wir nun in (6) partielle Integration in bezug auf φ_l durch, und beachten, daß wir dabei durch Differenzieren von G^{-l} zum Schluß G erhalten, so wird aus (7)

$$U(x,t) = \int_0^1 d\tau_1 \dots \int_0^1 d\tau_s \varphi(\tau_1, \dots, \tau_s) \sum_1 (x, t, \tau), \tag{8}$$

wobei

$$\sum_1 = \sum_{\epsilon} G(t + \epsilon(x - \tau)) \tag{9}$$

wird. Analog können wir die anderen Aufgaben in §3 und in diesem Paragraphen behandeln.

Literatur

Fox, D. W., Pucci, C., *The Dirichlet Problem for the Wave Equation*, Annali di mathematica pura ed applicata 4 (46) (1958) 155–182.

Hornich, H., *Über Schwingungen mit periodischer Störung und Lösung*, Mh. Math. 60 (1956) 223–230.

Hlawka, E., *Über einige Reihen, welche mit den Vielfachen von Irrationalzahlen zusammenhängen*, Acta Arith. 37 (1980), 285–306.

Hlawka, E., *Über einige Reihen, welche mit den Vielfachen von Irrationalzahlen zusammenhängen II*, 190 (1981), 33–61.

Hilbert, D., Courant, *Mathematische Methoden der Physik II*, Springer, Berlin, 1937.

Hlawka, E., *Gleichverteilung und Simulation*, Sb. Akad. Wiss. Abt. II, 206 (1997), 183–216.

Anschrift das Verfassers: Prof. Dr. E. Hlawka, Margaretenstraße 27/II/9, 1040 Wien.