Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 267–277

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Zu den isotropen Kreistripeln mit kongruenten Apollonischen Berührkreisen

Von

J. Tölke

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 16. Oktober 1997 durch das k. M. Hellmuth Stachel)

Einleitung

Das isotrope Analogon des klassischen Apollonischen Berührproblems wurde von J. Lang [1] und H. Sachs [3] behandelt. Es gibt demnach zu einem vorgegebenen Tripel reeller parabolischer Kreise κ_1, κ_2, κ_3 im algebraischen Sinn i.a. genau zwei Kreise $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ (reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert komplex), die κ_1, κ_2, κ_3 berühren.[1] Die Note untersucht die Frage, wann die als verschieden angenommenen Kreise $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sogar *kongruent* sind. Hilfsmittel ist eine in [5] angegebene *Liesche Kreisverwandtschaft* π_c^* der isotropen Ebene. Bezeichnet M ihre Kreismenge, die also aus den parabolischen Kreisen

$$\kappa_{\mathrm{r}} :\equiv y - rx^2 - \alpha x - \beta = 0, \quad r \neq 0,$$

den nicht isotropen Geraden κ_0 und den Punkten $P(x, y)$ besteht, so ergibt sich π_c^* als Fortsetzung der auf M erklärten bijektiven Abbildung π_c ($0 \neq c \in \mathbb{R}$ fest gewählt; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \ni R \neq c$)

$$\begin{aligned} P(x,y) &\mapsto \eta - cx\xi + cx^2 - y = 0 \\ \kappa_c &\mapsto P(-\alpha/c, \beta) \\ \kappa_{\mathrm{R}} &\mapsto \eta - \frac{c^2}{4(c-\mathrm{R})}\xi^2 - \frac{c\,\alpha}{2(c-\mathrm{R})}\xi - \beta - \frac{\alpha^2}{4(c-\mathrm{R})} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Für den Fall, daß das Tripel aus drei kongruenten parabolischen Kreisen besteht, vergleiche man [6].

Dabei liegt der absolute Punkt der isotropen Ebene auf den y, η-Achsen. Für die im folgenden benutzten Grundbergriffe der isotropen Geometrie verweisen wir auf [3].

1.

Wir nehmen im folgenden zunächst an, daß ein Tripel reeller parabolischer Kreise κ_1, κ_2, κ_3 zwei verschiedene reelle bzw. konjugiert komplexe kongruente Apollonische Berührkreise $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ besitzt.

Wäre ein Kreispaar κ_i, κ_j des Tripels kongruent, so wählen wir ihren gemeinsamen Radius als die Konstante c in (1). Die Radien von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sind sicher von c verschieden. Sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ *kongruent*, so auch ihre Bilder bei π_c. Da zwei kongruente Kreise aber höchstens einen Schnittpunkt haben, sind κ_i und κ_j notwendig inkongruent.

Gibt es ein sich berührendes Paar κ_i, κ_j, so unterscheiden wir zwei Fälle. Sind $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ parabolisch vom Radius $c(\in \mathbb{R})$, so berühren sich auch $\pi_c(\kappa_i)$ und $\pi_c(\kappa_j)$ und haben andererseits die beiden verschiedenen Punkte $\pi_c(\mathcal{A}_1)$ und $\pi_c(\mathcal{A}_2)$ gemeinsam. W! Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Geraden, so wählen wir $0 \neq c(\in \mathbb{R})$ und verschieden von den Radien der Kreise κ_i, κ_j. die Bijektion π_c führt dann diesen Fall auf den gerade behandelten zurück. Damit ist gezeigt:

Satz 1. Hat ein Tripel reeller parabolischer Kreise κ_1, κ_2, κ_3 zwei verschiedene reelle bzw. konjugiert komplexe kongruente Apollonische Berührkreise $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, so sind die Kreise κ_i paarweise inkongruent und nicht berührend.

2.

Betrachten wir die Berührpunkte $B_{ij} := \kappa_i \cap \mathcal{A}_j$. Wegen der Kongruenz von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ gilt $B_{i1} \neq B_{i2}$ für $i = 1, 2, 3$. Da B_{i1} und B_{i2} nicht parallel sind, definieren sie vermöge

$$\sigma_i(B_{i1}) = B_{i2}, \quad \sigma_\mathrm{i}(B_{i2}) = B_{i1}$$

eine *spanntreue isotrope Ähnlichkeit* σ_i [3,S.14]. Die Punkte der durch den Mittelpunkt von B_{i1}, B_{i2} gehenden isotropen Geraden s_i sind die Fixpunkte von σ_i. Damit gilt insbesondere $\sigma_i(\kappa_i) = \kappa_i$. Da für Punkte $P, Q(\neq P)$ eines parabolischen Kreises κ die Verbindungsgerade $P \cup Q$ parallel zur isotropen Winkelhalbierenden [4,S. 504] der Tangenten in P und Q an κ ist, folgt, daß $B_{i1} \cup B_{i2}$ parallel zur isotropen Winkelhalbierenden der Tangenten in B_{i1} und B_{i2} an κ_i ist.

Sind A_1 and A_2 Geraden, so gilt damit

$$B_{i1} \cup B_{i2} \| B_{j1} \cup B_{j2} \text{ für } i,j \in \{1,2,3\}$$

und die Geraden A_1, A_2 sind nicht parallel. Ferner gilt $\sigma_i(A_1) = A_2$ und $\sigma(A_1 \cap A_2) = A_1 \cap A_2 =: 0$, d.h. $s_1 = s_2 = s_3 =: s$.

Sind A_1 und A_2 kongruente parabolische Kreise vom (reellen) Radius c, so können die Punkte $\pi_c(A_1)$ und $\pi_c(A_2)$-als Punkte des parabolischen Kreises $\pi_c(\kappa_i)$-nicht parallel sein. Damit haben A_1 und A_2 einen Punkt $0 := A_1 \cap A_2$ gemeinsam.

Wegen $\sigma_i(\kappa_i) = \kappa_i$ werden die Tangenten in Punkten P und $\sigma_i(P)$ von κ_i aufeinander abgebildet. Damit liefert die Kongruenz der Kreise A_1, A_2 die Beziehung $\sigma_i(A_1) = A_2$, womit $\sigma_i(0) = 0$ und also $s_1 = s_2 = s_3 =: s$. gilt. Die gemeinsame Tangente von A_1 und A_2 ist Fixgerade von jeder spanntreuen Ähnlichkeit σ_i. Also gilt auch in diesem Fall

$$B_{i1} \cup B_{i2} \| B_{j1} \cup B_{j2} \text{ für } i,j \in \{1,2,3\}.$$

Nach dem Gezeigten stimmen die spanntreuen Ähnlichkeiten σ_1, σ_2 und σ_3 in den bezüglichen Fällen jeweils überein: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 =: \sigma$; σ ist eine isotrope Spiegelung an der isotropen Geraden s mit der zu $B_{i1} \cup B_{i2}$ parallelen Spiegelrichtung. Damit sind die (reellen) Potenzgeraden p_{ij} der Kreise κ_i, κ_j zueinander parallel. Sie sind sogar paarweise verschieden. Denn nehmen wir an, daß die Kreise κ_1, κ_2, κ_3 mit den Radien R_1, R_2, R_3 einem Kreisbüschel angehören. Dann können wir o.B.d.A. die Darstellung der Kreise κ_i in der Form $\kappa_i : y = R_i(x^2 - a^2)$, $a \neq 0$ annehmen. Soll die Gerade $y = mx + n$ gemeinsame Tangente sein, so folgt

$$m^2/4R_i + n + R_i a^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 4R_i R_j a^2 \Rightarrow R_j = R_i$$

W! Es kann auch keinen gemeinsamen parabolischen Berührkreis κ mit reellem Radius R der Kreise κ_1, κ_2, κ_3 geben. Denn die *isotrope Inversion* [3,S.149]

$$x^* = x, y^* = Rx^2 - y$$

führt dann diesen Fall auf den eben behandelten zurück. Also gilt

Satz 2. Hat ein Tripel κ_1, κ_2, κ_3 reeller parabolischer Kreise zwei verschiedene reelle bzw. konjugiert komplexe kongruente Apollonische Berührkreise A_1, A_2, so sind die Potenzgeraden aller Kreispaare κ_i, κ_j parallel und paarweise verschieden.

Satz 3. Hat ein Tripel κ_1, κ_2, κ_3 reeller parabolischer Kreise zwei verschiedene reelle bzw. konjugierte komplexe kongruente Apollonische

Berührkreise A_1, A_2, so kann es keinen weiteren gemeinsamen Berührkreis der Tripelkreise mit reellem Radius geben.

Denn sind die Kreise A_1, A_2 parabolisch mit dem Radius $c(\in \mathbb{R})$, so folgt über π_c nach dem oben Ausgeführten die Behauptung. Sind die A_1, A_2 Geraden, so wählen wir $0 \neq c(\in \mathbb{R})$ und verschieden von den Radien der Kreise κ_i. Damit führt π_c diesen Fall auf den gerade behandelten zurück.

3.

Zur analytischen Darstellung der als existent vorausgesetzten kongruenten Apollonischen Berührkreise A_1, A_2 setzen wir zusätzlich voraus, daß die Kreise A_1, A_2 *parabolisch* sind. Als Koordinatenursprung wählen wir den Punkt $0 = A_1 \cap A_2$. Die x-Achse sei parallel zur Spiegelrichtung von σ gewählt. Es folgt

$$A_\tau \equiv y - cx^2 + (-1)^\tau acx = 0, \quad \tau = 1, 2, \tag{2}$$

wobei $0 \neq c(\in \mathbb{R})$ den gemeinsamen Radius bezeichnet und für $a \in \mathbb{C}\ a \neq 0$ gilt. Also gilt entweder $\mathbb{R} \ni a \neq 0$ oder $a = i\alpha$ mit $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$. Mit (2) folgt, wenn R_i die Radien der Kreise κ_i bezeichnet,

$$\pi_c(\kappa_i) \equiv \eta - \frac{c^2}{4(c - R_i)}(\xi^2 - a^2) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

und somit

$$\kappa_i \equiv y - R_i x^2 + \frac{a^2c^2}{4(c - R_i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad \blacksquare \tag{4}$$

Bemerkung 1.
Die Kreise A_1, A_2 sind die Hüllkomponenten der einparametrigen Kreisschar

$$\kappa(x, y, t) \equiv y - t\,x^2 + \frac{a^2c^2}{4(c - t)} = 0. \tag{5}$$

Diese Kreisschar läßt sich genau in jene *linearen Kreissysteme* [3,S. 56] a einbetten, für deren homogene Hyperebenenkoordinaten $a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4$

$$\mathrm{a} = \{0 : a_1 : a^2c^2\ a_4 : -2ca_4 : a_4\}, \quad a_4 \neq 0 \tag{6}$$

gilt. Wählt man $(a_1 - 2aca_4)(a_1 + 2aca_4) \neq 0$, so ist das so bestimmte Kreissystem a^* nicht parabolisch. Da die Kreise A_1, A_2 mit (2) ersicht-

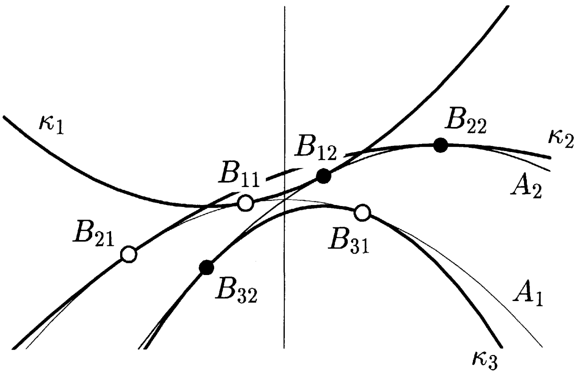

Abb. 1.

lich nicht zu a* gehören, sind es genau die in [3,Satz 4.9] genannten Kreise κ_1, κ_1^*, welche also in unserem Beispiel *kongruent* sind. Über derartige lineare Kreissysteme scheinen keine Aussagen bekannt zu sein.

4.

Mit Satz 1 und Satz 2 läßt sich noch nicht entscheiden, ob die Apollonischen Berührkreise Geraden oder kongruente parabolische Kreise sind. Man wird also nach einem metrischen Unterscheidungsmerkmal suchen. Als (auch konstruktiv verwertbare) Elemente hierzu bieten sich die Potenzgeraden p_{ij} und die dazu parallelen Tangenten t_l der Kreise κ_i an $(\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\})$.
Im Falle *parabolischer* Kreise A_1, A_2 ergibt sich mit den Bezeichnungen von Abschnitt **3**

$$p_{ij} : y = (ac/2)^2 \frac{R_i + R_j - c}{(c - R_i)(c - R_j)}, \quad i \neq j. \tag{7}$$

Für den *isotropen Abstand* $s(p_{il}, p_{ij})$ der Potenzgeraden p_{il}, p_{ij} folgt somit

$$s(p_{il}, p_{ij}) = (ac/2)^2 \frac{R_i(R_j - R_l)}{(c - R_i)(c - R_j)(c - R_l)}, \quad \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}. \tag{8}$$

Mit (4) berechet sich der istotrope Abstand $s(t_l, t_j)$ zu

$$s(t_l, t_j) = (ac/2)^2 \frac{R_l - R_j}{(c - R_l)(c - R_j)}. \tag{9}$$

Hieraus folgt umgekehrt für den Radius c der kongruenten Apollonischen Berührkreise

$$c = R_i\{1 - \frac{s(t_l, t_j)}{s(p_{il}, p_{ij})}\}, \quad \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}. \tag{10}$$

Damit gilt, da nach Voraussetzung $c \neq 0$ ist,

$$s(t_l, t_j) \neq s(p_{il}, p_{ij}). \tag{11}$$

Satz 4. Ein Tripel reeller parabolischer Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ hat genau dann zwei verschiedene reelle bzw. konjugiert komplexe kongruente parabolische Apollonische Berührkreise A_1, A_2, wenn

(a) die Kreise κ_i paarweise inkongruent und sich nicht berührend sind,

(b) die Potenzgeraden p_{ij} aller Kreispaare κ_i, κ_j parallel und verschieden sind, und

(c) für die isotropen Abstände der Geraden p_{ij} bzw. t_l

$$s(t_l t_j) \neq s(p_{il}, p_{ij}), \quad \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$$

gilt, wobei t_l die zu den Potenzgeraden parallele Tangente des Kreises κ_l ist.

Beweis. 1) Hat das Tripel $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ zwei kongruente parabolische Apollonische Berührkreise, so gilt nach Satz 1, Satz 2 und dem eben Ausgeführten sicher (a), (b) und (c).

2) Es gelte für das Tripel (a), (b), (c). Da die Kreise κ_i paarweise inkongruent und die Potenzgeraden parallel sind, läßt sich das Koordinatensystem so wählen, daß für κ_i die Darstellungen

$$\kappa_i \equiv y - R_i x^2 - \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{12}$$

gelten, wobei für die Radien

$$R_1 R_2 R_3 (R_1 - R_2)(R_1 - R_3)(R_2 - R_3) \neq 0 \tag{13}$$

gilt. Das paarweise Nichtberühren der Kreise κ_i bzw. die Verschiedenheit der Potenzgeraden hat

$$\beta_i \neq \beta_j \text{ bzw. } \beta_i(R_j - R_l + \beta_j(R_l - R_i) + \beta_l(R_i - R_j) \neq 0 \tag{14}$$

zur Folge. Die Forderung (c) lautet damit wegen

$$s(t_l, t_j) = \beta_j - \beta_l, s(p_{il}, p_{ij}) = \frac{R_i\beta_j - R_j\beta_i}{R_i - R_j} - \frac{R_i\beta_l - R_l\beta_i}{R_i - R_l}$$

$$s(t_l, t_j) - s(p_{il}, p_{ij}) = \\ = \frac{\beta_i R_i(R_j - R_l) + \beta_j R_j(R_l - R_i) + \beta_l R_l(R_i - R_j)}{(R_i - R_j)(R_i - R_l)} \neq 0 \tag{15}$$

mit $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. Wegen (14, rechts) können wir $c \in \mathbb{R}$ gemäß

$$c := \frac{\beta_i R_i(R_j - R_l) + \beta_j R_j(R_l - R_i) + \beta_l R_l(R_i - R_j)}{\beta_i(R_j - R_l) + \beta_j(R_l - R_i) + \beta_l(R_i - R_j)}, \quad \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}. \tag{16}$$

definieren. Wegen (13), (14, links) und (15) gilt $c \neq 0, R_1, R_2, R_3$. Mit (16) definieren wir weiter $(i \neq j)$

$$\begin{aligned} (c\xi_b)^2 &:= 4\frac{(\beta_i - \beta_j)(c - R_i)(c - R_j)}{R_j - R_i}, \\ \eta_b &:= \frac{\beta_i(c - R_i) - \beta_j(c - R_j)}{R_j - R_i}. \end{aligned} \tag{17}$$

Man überzeugt sich, daß die linken Seiten in (17) nicht von der speziellen Wahl i,j$\in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ abhängen. Bezeichnet $c\xi_b$ eine der Wurzeln von (17,oben), so sind die parabolischen Kreise

$$A_\tau \equiv y - cx^2 + (-1)^\tau c\xi_b x - \eta_b = 0, \quad \tau = 1, 2 \tag{18}$$

kongruent und berühren jeweils die Kreise (12). Denn mit (17) gilt

$$(c - R_i)x^2 - (-1)^\tau c\xi_b x + \eta_b - \beta_i = (c - R_i)\left\{x - (-1)^\tau \frac{c\xi_b}{2(c - R_i)}\right\}^2.$$

Bemerkung 2.
Für eine Konstruktion der Kreise A_τ soll noch folgendes angemerkt werden. Bezeichne S_i den Berührpunkt des Kreises κ_i mit der Tangente t_i und $t(A)$ die gemeinsame (reelle) Tangente der Kreise A_1, A_2. Die Schnittpunkte von $t(A)$ bzw. p_{ij} mit der Verbindungsgeraden der parallelen Punkte S_1, S_2, S_3 seien mit T bzw. M_{ij} bezeichnet. Dann gilt mit $0 := A_1 \cap A_2$

$$\begin{aligned} \mathrm{DV}(S_1S_2; S_3T) &= -\mathrm{TV}(M_{23}M_{13}; M_{12}), \quad \mathrm{DV}(M_{23}M_{13}; M_{12}T) = \\ &= -\mathrm{TV}(S_1S_2; S_3), \quad \mathrm{DV}(S_1S_2; S_3 0) = \\ &= -\mathrm{TV}(R_1R_2; R_3). \end{aligned} \tag{19}$$

Damit sind 0 und t(A), als Parallele zu den Potenzgeraden, konstruierbar. Mit c als Radius der Kreise A_1, A_2 liegen die Apollonischen Berührkreise auch geometrisch fest. Dabei kann c über die mit (16) äquivalente Relation

$$\mathrm{TV}(R_1R_2c) = -\frac{\mathrm{TV}(R_1R_2; R_3)}{\mathrm{TV}(S_1S_2; S_3)} \tag{16'}$$

bestimmt werden.

Realitätsfragen der Apollonischen Berührkreise A_1, A_2 werden durch (17) beantwortet. Danach gilt

$$(c\xi_b)^2 := 4q\left(-\frac{\beta_i-\beta_j}{R_i-R_j}\right)\left(-\frac{\beta_l-\beta_j}{R_l-R_j}\right)\left(-\frac{\beta_l-\beta_i}{R_l-R_i}\right)\text{mit}$$

$$q := \frac{(R_i-R_j)^2(R_l-R_j)^2(R_l-R_i)^2}{[\beta_i(R_j-R_l)+\beta_j(R_l-R_i)+\beta_l(R_i-R_j)]^2}$$

Also sind A_1, A_2 genau dann reell, wenn sich entweder
(i) alle Kreispaare des Tripels $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ reell schneiden oder
(ii) genau ein Kreispaar des Tripels $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ sich reell schneidet.

5.

Man kann nach jenen *isotropen Zwangläufen* K_τ fragen, bei denen die mitgeführten Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ denselben parabolischen Kreis A_τ als Hüllbahn besitzen. Bei solchen Zwangläufen müssen also Kreishüllbahnen i.a. parabolische Kreise sein, d.h. der gesuchte Zwanglauf ist invers zum isotropen *Kreuzschiebergetriebe* [2,S. 149f.].
Zur Bestimmung von K_τ haben die Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ an der Stelle $t = 0$ die Darstellungen (12). Mit der Hüllbahn (18), wobei die Bedeutungen (16) und (17) gelten, folgt dann für K_τ

$$x(t) = t + x_0, y(t) = ct^2 - (-1)^\tau c\xi_b t + 2ctx_0 + y_0. \qquad (20)$$

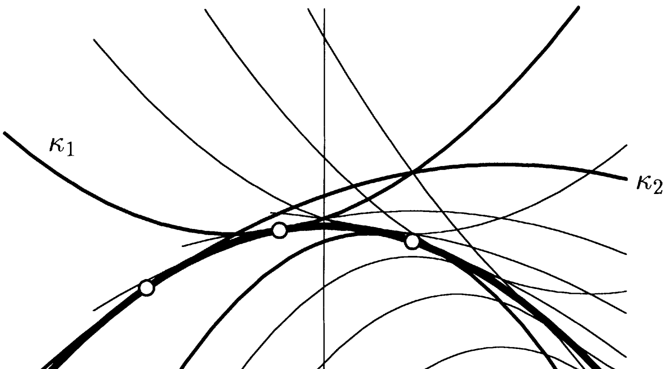

Abb. 2.

6.

Verbleibt der Fall zweier Geraden als Apollonische Berührkreise. Diesbezüglich gilt

Satz 5. Ein Tripel reeller parabolischer Kreise $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ hat genau dann zwei verschiedene reelle bzw. konjugiert komplexe Geraden $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ als Apollonische Berührkreise, wenn

(a) die Kreise κ_i paarweise inkongruent und sich nicht berührend sind,

(b) die Potenzgeraden p_{ij} aller Kreispaare κ_i, κ_j parallel und verschieden sind, und

(c) für die isotropen Abstände der Geraden p_{ij} bzw. t_l

$$s(t_l, t_j) = s(p_{il}, p_{ij}), \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$$

gilt, wobei t_l die zu den Potenzgeraden parallele Tangente des Kreises κ_l ist.

Beweis: 1) Hat das Tripel $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ die Eigenschaften (a) und (b), so haben wir o.B.d.A. die Darstellungen (12) mit (13) und (14). Die Forderung (c) ist nach (15) gleichbedeutend mit

$$0 \neq \frac{\beta_i - \beta_j}{1/R_i - 1/R_j} = \text{const.} =: (m/2)^2. \tag{21}$$

Damit ist $n := \beta_i - m^2/4R_i$ unabhängig von $i \in \{1, 2, 3\}$. Bezeichnet m eine der Wurzeln von (21), so folgt, daß die Geraden

$$a_\tau \equiv y + (-1)^\tau mx - n = 0, \quad \tau = 1, 2$$

die Kreise (12) jeweils berühren.

2) Gibt es zwei Geraden $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, die das Tripel $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ berühren, so gelten nach Satz 1 und Satz 2 (a) und (b). Ist dann

$$s(t_l, t_j) \neq s(p_{il}, p_{ij}), \{i, j, l\} = \{1, 2, 3\},$$

so gibt es nach Satz 4 zwei verschiedene reelle bzw. konjugiert komplexe kongruente parabolische Apollonische Berührkreise $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. Dies aber steht im Widerspruch zu Satz 3.

Realitätsfragen werden durch (21) beantwortet. Wegen

$$m^2 = 4\left(-\frac{\beta_i - \beta_j}{R_i - R_j}\right) R_i R_j = 4\left(-\frac{\beta_l - \beta_j}{R_l - R_j}\right) \cdot R_l R_j =$$
$$= 4\left(-\frac{\beta_l - \beta_i}{R_l - R_i}\right) R_l R_i$$

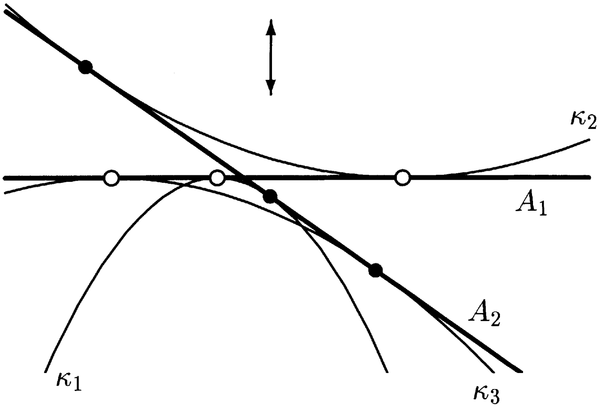

Abb. 3.

sind die Apollonischen Geraden A_1, A_2 genau dann reell, wenn wenigstens

(i) ein Kreispaar des Tripels $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ sich reell schneidet und das Produkt ihrer Radien positiv ist oder

(ii) ein Kreispaar des Tripels $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ sich nicht reell schneidet und das Produkt ihrer Radien negativ ist.

Bemerkung 3.
Für konstruktive Zwecke vermerken wir, daß mit $0 = A_1 \cap A_2$ wegen $s(t_l, t_j) = s(p_{il}, p_{ij})$

$$\mathrm{DV}(R_1 R_2; R_3 0) = -\mathrm{TV}(S_1 S_2; S_3)$$

gilt. Damit lassen sich A_1, A_2 konstruieren.

Danksagung

Besonderer Dank meinem Freund Dr. W. Schürrer für die Anfertigung der Figuren.

Literatur

[1] Lang, J.: Zur isotropen Dreiecksgeometrie und zum Apollonischen Berührproblem in der isotropen Ebene, Ber. d. Math. Stat. Sek., Forschungszentrum Graz, Ber. **241**, 1–11 (1983).

[2] Röschel, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene I, II, J. Geometry **21** (1983), 146–156, **24**, 112–122 (1985).

[3] Sachs, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig und Wiesbaden, 1987

[4] Strubecker, K.: Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf ebene Ausgleichprobleme, Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. Kl.II **192**, 497–559 (1983)
[5] Tölke, J.: Ein Beispiel einer kinematisch induzierten Lieschen Kreisverwandtschaft der isotropen Ebene. Erscheint im Journ. of Geometry.
[6] Tölke, J.: Zu den kongruenten Kreisen eines linearen parabolischen Kreissystems der isotropen Ebene, Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. Kl.II **205**, 153–167 (1996)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. J. Tölke, Fachbereich 6–Mathematik, Universität Gesamthochschule Siegen, D-57068 Siegen, Deutschland.