Anzeiger. Abt. II (1998) 135: 11–13

Eine Anwendung des Hohenberg'schen Chordalkreises zweier isotroper Kreise

Von

J. Tölke

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998
durch das k. M. Hellmuth Stachel)

Unter der Chordalkurve zweier Kegelschnitte k_0 und k_1 versteht man nach *F.* Hohenberg [1] die Hüllkurve jener Geraden, die aus k_0 und k_1 Sehnen mit dem Längenverhältnis 1 ausschneiden. Sind k_0 und k_1 parabolische Kreise der isotropen Ebene[1], so ist die Chordalkurve i.a. ein Kreis k_{01} [2,S. 84]. Mit den Kreisgleichungen

$$k_0\, y = R_0 x^2, \quad k_1\, y = R_1 x^2 + \alpha_1 x + \beta_1 \quad \text{und} \quad R_0 R_1 (R_0^2 - R_1^2) \neq 0 \tag{1}$$

folgt für den Chordalkreis k_{01} die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} k_{01}\, y = {} & \frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1} x^2 + \alpha_1 \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_1^2} x + \beta_1 \frac{R_0}{R_0 - R_1} \\ & + \alpha_1^2 \frac{R_0 R_1}{4(R_0 - R_1)^2 (R_0 + R_1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sei c ein wendepunktfreies und scheitelfreies zulässiges C^r-Kurvenstück $(r \geq 4)$ der isotropen Ebene. Durch eine Bewegung aus der Gruppe $\mathbf{B}_3$ läßt sich erreichen, daß ein Punkt P_0 von c im Koordinatenursprung liegt und die x-Achse mit der Kurventangente in P_0 an c zusammenfällt.

[1] Für Bezeichnungen und Begriffsbildungen der isotropen Geometrie verweisen wir auf die Monographie [3] von H. Sachs.

Außerdem können wir c auf seine isotrope Bogenlänge x als Parameter beziehen. Damit gilt für c

$$y = f(x) \quad \text{mit} \quad f(0) = f^{(1)}(0) = 0,\ f^{(2)}(0)f^{(3)}(0) \neq 0,\ f(x) \in C^r. \tag{3}$$

Wir betrachten den Krümmungskreis k_0 bzw. k_1 im Punkte P_0 bzw. im Punkte $P_1 \neq P_0$ von c. Mit $P_0 = (0,0), P_1 = (h, f(h))$ (mit $h \neq 0$) gilt die Darstellung (1) mit

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2} f^{(2)}(0), R_1 = \frac{1}{2} f^{(2)}(h), \alpha_1 = f^{(1)}(h) - hf^{(2)}(h), \\ \beta_1 &= f(h) - hf^{(1)}(h) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(h). \end{aligned} \tag{4}$$

Damit liefern die Taylorschen Polynome

$$\alpha_1 = -\frac{h^2}{2} f^{(3)}(0) - \frac{h^3}{3} f^{(4)}(0), \quad \beta_1 = \frac{h^3}{6} f^{(3)}(0) + \frac{h^4}{8} f^{(4)}(0),$$

$$R_1 - R_0 = \frac{h}{2} f^{(3)}(0) + \frac{h^2}{4} f^{(4)}(0),$$

$$R_1^2 - R_0^2 = \frac{h}{2} f^{(2)}(0)f^{(3)}(0) + \frac{h^2}{4}\{[f^{(3)}(0)]^2 + f^{(2)}(0)f^{(4)}(0)\}$$

und es folgt für den Chordalkreis k_{01} der Krümmungskreise k_0 und k_1 nach (2) die *Grenzlagenaussage*

$$\lim_{P_1 \longrightarrow P_0} k_{01} \equiv y - \frac{1}{4} f^{(2)}(0)x^2 = 0. \tag{5}$$

Der Grenzkreis (5, rechts) ist aber aus anderem Zusammenhang bekannt. Für eine vollständig zirkuläre Parabel 4. Ordnung[2] ist ihr Scheitel genau dann ein Flachpunkt, wenn ihre isotrope Krümmung κ_G bezüglich der *allgemeinen isotropen Ähnlichkeitsgruppe* $\mathbf{G}_5$ gleich 1/2 ist [3, S. 162f.]. Solche Parabeln haben mit Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$ eine Darstellung der Form

$$y = c_0(x + c_1)^4 + c_2 x + c_3, \quad c_0 \neq 0.$$

Damit folgt sofort (vgl. auch [5]) der

Satz. Sei c ein wendepunktfreies und scheitelfreies zulässiges C^r-Kurvenstück $(r \geq 4)$ der isotropen Ebene. Bezeichne k_0 bzw. k_1 den Krüm-

[2] Für sie ist der absolute Punkt ein *Spitzpunkt* mit der absoluten Geraden als Tangente. Sie wurden von K. Strubecker [4] hinsichtlich der Gruppe $\mathbf{B}_3$ und der längentreuen isotropen Gruppe $\mathbf{L}_4$ untersucht.

mungskreis in den verschiedenen Kurvenpunkten P_0 bzw. P_1. Dann konvergiert der Chordalkreis von k_0 und k_1 für $P_1 \longrightarrow P_0$ gegen einen Kreis k. Dieser Kreis ist Ort der Flachpunkte aller jener c in P_0 oskulierenden vollständig zirkulären Parabeln 4.Ordnung, für die der Scheitel zugleich Flachpunkt ist.

Literatur

[1] Hohenberg, F.: Über die Chordalkurve zweier Kegelschnitte. El. Math. **29**, 47–48 (1974).

[2] Röschel, O.: Ein räumliches Analogon der Chordalkurve zweier Kegelschnitte. Anz. Österr. Akad. Wiss. Wien **7**, 81–85 (1990).

[3] Sachs, H.: Ebene isotrope Geometrie. Wiesbaden: Vieweg 1987.

[4] Strubecker, K.: Über die Parabeln zweiter bis vierter Ordnung. Praxis Math. **4**, 141–144, 169–174, 197–201 (1962).

[5] Tölke, J.: Zu einem Satz von O. Röschel der ebenen isotropen Kurventheorie. J. Geom. (to appear).

Anschrift des Verfassers: Dr. S. S. Stamatakis, Fachbereich 6–Mathematik, Universität Gesamthochschule Siegen, Hölderlinstrase 3, D-57068 Siegen, BRD.