Sitzungsber. Abt. II (1999) 208: 143–157

Eine Charakterisierung der q-Exponentialpolynome

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 18. November 1999
durch das w. M. Johann Cigler)

Abstract

M. Aigner [1] has found an elementary proof of a characterization of the Bell numbers using Hankel determinants. In this note we give two q-analogs of this result.

0

M. Aigner hat in [1] einen elementaren Beweis für die von Ph. Flajolet [5] gefundene Charakterisierung der Bellzahlen B_n gegeben: Seien $\tilde{A}_n$ und $\tilde{B}_n, n \geq 0$, die Matrizen, die durch $\tilde{A}_n(i,j) = B_{i+j}$ bzw. $\tilde{B}_n(i,j) = B_{i+j+1}, 0 \leq i, j \leq n$, definiert sind, dann ist die Folge (B_n) die eindeutig bestimmte Folge reeller Zahlen, für welche

$$\det \tilde{A}_n = \det \tilde{B}_n = \prod_{k=0}^{n} (k!)$$

für alle n erfüllt ist.

Die Bellzahl B_n zählt die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge und lässt sich auch in der Gestalt $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$ darstellen, wobei die $S(n,k)$ die Stirlingzahlen der zweiten Art sind. Man kann daher statt der Bellzahlen gleich allgemeiner die Exponentialpolynome $\varphi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^k$ betrachten (vgl. C. Krattenthaler [7], (3.54)).

Auf Grund von Computerexperimenten vermutete ich, dass eine ähnliche Charakterisierung auch für die q-Analoga der Exponentialpolynome gilt. Ich habe daher zunächst die in [1] verwendeten Methoden auf diesen allgemeineren Fall verallgemeinert. Dabei zeigte sich, dass man nur die erste Hankeldeterminante berechnen muss, weil sich die zweite aus der Rekurrenzrelation der q-Exponentialpolynome von selbst ergibt. Dann hat mich Herr Christian Krattenthaler auf den engen Zusammenhang zwischen orthogonalen Polynomen und Hankeldeterminanten (vgl. [7], Theorem 11–13) sowie auf die Arbeiten von Leclerc [8], Delsarte [4] und Radoux [10] hingewiesen. Ich möchte ihm an dieser Stelle für seine Anmerkungen, die mir sehr geholfen haben, herzlich danken.

Auf seine Anregung hin habe ich die Beweise so modifiziert, dass der Zusammenhang mit orthogonalen Polynomen im Mittelpunkt steht.

1

Die zugrunde liegende Theorie ist sehr einfach. Es geht also nur darum, die richtigen konkreten Realisierungen zu finden. Wir betrachten den Vektorraum aller Polynome in einer Unbestimmten x über dem Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten q. Dann definiert jede Folge (a_i) aus dem Körper mit $a_0 = 1$ ein eindeutig bestimmtes lineares Funktional F durch $F(x^i) = a_i, i \geq 0$.

Sei nun

$$p_n(x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & x \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} & x^{n-1} \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}.$$

Dann ist klar, dass

$$F(x^i p_n(x)) = 0, 0 \leq i < n,$$

und $F(x^n p_n(x)) = \det(a_{i+j})_{i,j=0}^n$ gilt.

Ist die Folge (a_i) so gewählt, dass alle Hankeldeterminanten $\det(a_{i+j})_{i,j=0}^n \neq 0$ sind, so gilt für die entsprechenden normierten Polynome

$$\bar{p}_n(x) = \frac{p_n(x)}{\det(a_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}} = \sum (-1)^{n-i} c_{n,i} x^i \tag{1}$$

die Beziehung

$$(-1)^n \det(a_{i+j})_{i,j=0}^{n-1} c_{n,0} = \det(a_{i+j})_{i j=0}^{n-1} \bar{p}_n(0) = \det(a_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1}. \quad (2)$$

Kennt man also die erste Hankeldeterminante, dann auch die zweite. Ausserdem ist

$$F(\bar{p}_n(x)\bar{p}_m(x)) = \sum_{i,j}(-1)^{i+j} c_{n,i} c_{m,j} F(x^{i+j}) = F(\bar{p}_n^2)\delta_{m,n}.$$

Das bedeutet also

$$((-1)^{m-i} c_{m,i})(a_{i+j})((-1)^{n-j} c_{n,j})^t = (F(\bar{p}_m \bar{p}_n)).$$

Geht man zu den Determinanten über und beachtet, dass $c_{i,i} = 1$ ist, so folgt daraus

$$\det(a_{i+j})_{i,j=0}^n = \prod_{i=0}^n F(\bar{p}_i^2). \quad (3)$$

Kennt man also die zur Folge (a_i) gehörigen Orthogonalpolynome, so kennt man alle Hankeldeterminanten. Nach dem Satz von Favard existieren eindeutig bestimmte Folgen $(s_n)_{n \geq 0}$ und $(t_n)_{n \geq 0}$, so dass gilt $p_{n+1}(x) = (x - s_n)\bar{p}_n(\bar{x}) - t_{n-1}\bar{p}_{n-1}(x), n \geq 1$, mit $\bar{p}_0(x) = 1$ und $\bar{p}_1(x) = x - s_0$.

Es ist dann

$$F(\bar{p}_n^2) = t_0 \cdot t_1 \ldots t_{n-1}. \quad (4)$$

Seien nun $a_{n,j}$ die eindeutig bestimmten Koeffizienten in der Darstellung

$$x^n = \sum_{j=0}^n a_{n,j} \bar{p}_j(x). \quad (5)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n a_{n,j} \bar{p}_j(x) &= x \cdot x^{n-1} = x \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-1,j} \bar{p}_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^n a_{n-1,j}(\bar{p}_{j+1}(x) + s_j \bar{p}_j(x) + t_{j-1} \bar{p}_{j-1}(x)) \\ &= \sum (a_{n-1,j-1} + s_j a_{n-1,j} + t_j a_{n-1,j+1})\bar{p}_j(x)\end{aligned}$$

und somit gilt

$$a_{n,j} = a_{n-1,j-1} + s_j a_{n-1,j} + t_j a_{n-1,j+1}. \tag{6}$$

Speziell ist

$$a_{n,0} = F(x^n) = a_n. \tag{7}$$

Überdies gilt

$$a_{m+n} = F(x^{m+n}) = F\left(\sum_{i,j} a_{m,i}\bar{p}_i a_{n,j}\bar{p}_j\right) = \sum a_{m,i}a_{n,i}F(\bar{p}_i^2). \tag{8}$$

Wir benötigen das folgende einfache Lemma.

Lemma. *Die Folge der normierten orthogonalen Polynome für die Folge* $G(x^n) = F((x+z)^n) = \sum \binom{n}{k} a_k z^{n-k}$ *ist* $(\bar{p}_n(x-z))$.

Beweis:
Aus $G(x^n) = F((x+z)^n)$ folgt $G(p(x)) = F(p(x+z))$ für alle Polynome $p(x)$ und daher ist auch

$$G(\bar{p}_n(x-z)\bar{p}_m(x-z)) = F(\bar{p}_n(x)\bar{p}_m(x)) = F(\bar{p}_n^2(x)\delta_{m,n}.$$

Unser erster Zugang, der die Überlegungen von [1] verallgemeinert, besteht darin, eine Dreiecksmatrix $a_{n,j}$ mit $a_{n,0} = a_n$ zu finden, welche eine Rekurrenz der obigen Gestalt erfüllt. Dadurch sind auch die Rekurrenz der normierten orthogonalen Polynome $\bar{p}_n(x) = \sum (-1)^{n-i} c_{n,i} x^i$ und somit die Hankeldeterminanten bekannt. Der zweite Zugang besteht im wesentlichen darin, auf direkte Weise eine konkrete Darstellung dieser Polynome zu finden.

2

Seien $S(n,k)$ die von Carlitz und Gould studierten q-Stirlingzahlen, die durch die Rekursionen

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + [k]S(n,k) \tag{9}$$

mit den Randbedingungen $S(n,0) = \delta_{n,0}$ und $S(0,k) = \delta_{k,0}$ definiert sind. Dabei bedeutet wie üblich $[k] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1}$. (Für diese und andere Notationen aus der q-Analysis sei auf [3] verwiesen). Wir betrachten in dieser Note zwei q-Analoga der Exponentialpolynome, die auch in [9] studiert wurden:

$$\varphi_n(x) := \sum_{i=0}^{n} S(n,i)x^i \tag{10}$$

und

$$\Phi_n(x) := \sum_{i=0}^{n} S(n,i) q^{\binom{i}{2}} x^i. \tag{11}$$

Für x=1 ergeben sich die q-Bellzahlen $b_n = \varphi_n(1)$ und $B_n = \Phi_n(1)$. Die Folge $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ beginnt mit

$1, x, x + x^2, x + (2 + q)x^2 + x^3, x + (3+ 3q +q^2)x^2+ (3 + 2q+ q^2)$ $x^3 + x^4, \ldots$ und daher die Folge (b_n) mit

$1, 1, 2, 4 + q, 8 + 5q + 2q^2, 16 + 17q + 13q^2 + 5q^3 + q^4, \ldots$
Die Folge $(\Phi_n(x))_{n\geq 0}$ lautet

$1,\ x,\ x + qx^2,\ x + q(2 + q)x^2 + q^3x^3, x + q(3+ 3q + q^2)x^2+$ $q^3(3 + 2q + q^2)x^3 + q^6x^4$

und daher beginnt die Folge (B_n) mit

$1, 1, 1 + q, 1 + 2q + q^2 + q^3, 1 + 3q + 3q^2 + 4q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6, \ldots$

Bemerkung. Das einfachste q-Analogon der Exponentialpolynome sind die $\varphi_n(x)$. Sie liefern auch das schönste Resultat für die entsprechenden Determinanten. Die Polynome $\Phi_n(x)$ treten aber ebenfalls in natürlicher Weise auf, sowohl bei analytischen Fragestellungen (vgl. [3]) als auch bei kombinatorischen Überlegungen (vgl. [9]). Sei etwa F_n die Menge aller Folgen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von natürlichen Zahlen x_i mit $x_1 = 0$, $x_{i+1} \leq \max(x_j + 1, 1 \leq j \leq i)$ (sogenannte restricted growth functions). Ordnet man einer Folge $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus F_n das Gewicht $w((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = q^{x_1+\cdots+x_n} \cdot x^{\max(x_i)+1}$ zu und bezeichnet man mit $\bar{S}(n,k)$ das Gewicht aller solchen Folgen mit $\max(x_i) = k - 1$, so gilt

$$\bar{S}(n,k) = \bar{S}(n-1,k-1)q^{k-1}x + [k]\bar{S}(n-1,k).$$

Daraus ergibt sich sofort $\bar{S}(n,k) = S(n,k)q^{\binom{k}{2}}x^k$.
Das Gesamtgewicht von F_n ist also gerade $\Phi_n(x)$.
Wir beweisen die folgenden Sätze:

Satz 1. *Die q-Exponentialpolynome* $\varphi_n(x) := \sum_{i=0}^{n} S(n,i)x^i$ *erfüllen*

$$\det(\varphi_{i+j}(x))_{i,j=0}^{n} = q^{\binom{n+1}{3}} x^{\binom{n+1}{2}} \prod_{k=0}^{n}([k]!), \tag{12}$$

$$\det(\varphi_{i+j+1}(x))_{i,j=0}^{n} = q^{\binom{n+2}{2}} x^{\binom{n+2}{2}} \prod_{k=0}^{n}([k]!) \tag{13}$$

und

$$\det(\varphi_{i+j+2}(x))_{ij=0}^{n} = q^{\binom{n+2}{3}} x^{\binom{n+2}{2}} \prod_{k=0}^{n}([k]!)$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} q^{\binom{k}{2}} x^{k} \frac{[n+1]!}{[k]!}. \tag{14}$$

Die Folge $(\varphi_i(x))$ *ist durch* (12) *und* (13) *und die Folge* $(\varphi_{i+1}(x))$ *durch* (13) *und* (14) *eindeutig festgelegt.*

Satz 2. *Die q-Exponentialpolynome* $\Phi_n(x) := \sum_{i=0}^{n} S(n,i) q^{\binom{i}{2}} x^i$ *erfüllen*

$$\det(\Phi_{i+j}(x))_{i,j=0}^{n} = q^{2\binom{n+1}{3}} x^{\binom{n+1}{2}} \prod_{k=0}^{n}\prod_{i=1}^{k}[i](1-q^{i-1}x+q^{i}x), \tag{15}$$

$$\det(\Phi_{i+j+1}(x))_{i,j=0}^{n} = q^{2\binom{n+2}{3}} x^{\binom{n+2}{2}} \prod_{k=0}^{n}\prod_{i=1}^{k}[i](1-q^{i-1}x+q^{i}x) \tag{16}$$

und

$$\det(\Phi_{i+j+2}(x))_{i,j=0}^{n} = q^{2\binom{n+2}{3}} x^{\binom{n+2}{2}} \prod_{k=0}^{n}\prod_{i=1}^{k}[i](1-q^{i-1}x+q^{i}x)\times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n+1} q^{k(n+1)} x^{k} \frac{[n+1]!}{[k]!} \tag{17}$$

Die Folge $(\Phi_i(x))$ *ist durch* (15) *und* (16) *und die Folge* $(\Phi_{i+1}(x))$ *durch* (16) *und* (17) *eindeutig festgelegt.*

Speziell ergibt sich für $x = 1$:

$$\det(B_{i+j})_{i,j=0}^{n} = q^{\frac{n(n^2+2)}{3}} \prod_{i=2}^{n}([i-1]+q^{2i-1})^{n-i+1} \tag{18}$$

und

$$\det(B_{i+j+1})_{i,j=0}^{n} = q^{2\binom{n+2}{3}+n} \prod_{i=2}^{n}([i-1]+q^{2i-1})^{n-i+1}. \tag{19}$$

Es ist klar, dass durch die Hankeldeterminanten die q-Bellzahlen und die q-Exponentialpolynome eindeutig festgelegt sind.

3

Wir suchen nun ein q-Analogon der in [1] betrachteten Matrizen. Aus der Rekursion für die Stirlingzahlen ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \sum S(n,i)x^i = \sum (S(n-1,i-1) + [i]S(n-1,i))x^i \\ &= x\varphi_{n-1}(x) + x\varphi'_{n-1}(x)\end{aligned}$$

d.h.

$$\varphi_n(x) = x\varphi_{n-1}(x) + x\varphi'_{n-1}(x) = x(1+D)\varphi_{n-1}(x) \tag{20}$$

wobei allgemein $f'(x) = Df(x)$ die q-Ableitung $f'(x) = (f(qx) - f(x))/((q-1)x)$ bedeutet. Sei $\underline{x}$ der Multiplikationsoperator mit x auf dem Vektorraum der Polynome. Aus der leicht zu zeigenden Operatorformel (vgl. [3])

$$D^k \underline{x} = q^k \underline{x} D^k + [k]D^{k-1} \tag{21}$$

ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}D^k\varphi_n(x) &= D^k x\varphi_{n-1}(x) + D^k x\varphi'_{n-1}(x) = \\ &= q^k x D^k \varphi_{n-1}(x) + [k]D^{k-1}\varphi_{n-1}(x) + q^k x D^k \varphi'_{n-1}(x) + \\ &\quad + [k]D^{k-1}\varphi'_{n-1}(x),\end{aligned}$$

d.h.

$$\varphi_n^{(k)}(x) = [k]\varphi_{n-1}^{(k-1)}(x) + ([k] + q^k x)\varphi_{n-1}^{(k)}(x) + q^k x \varphi_{n-1}^{(k+1)}(x).$$

Speziell ist $\varphi_n^{(n)}(x) = [n]\varphi_{n-1}^{(n-1)}(x) = [n]!$.

Setzt man also

$$a_{n,k}(x) = \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!}, \tag{22}$$

so ergibt sich

$$a_{nk}(x) = a_{n-1,k-1}(x) + ([k] + q^k x)a_{n-1,k}(x) + q^k[k+1]x a_{n-1,k+1}(x) \cdot \tag{23}$$

Die untere Dreiecksmatrix $\tilde{C}_n := (a_{i,k}(x))_{i,k=0}^n$ hat in der Hauptdiagonale lauter Einser und hat daher Determinante 1.

Bezeichnet $\tilde{D}_n := (d_{i,j})_{i,j=0}^n$ die Diagonalmatrix mit $d_{i,i} = q^{\binom{i}{2}}[i]!\, x^i$, dann gilt

$$(\varphi_{i+j}(x))_{i,j=0}^n = \tilde{C}_n D_n \tilde{C}_n^t \tag{24}$$

und daher ist

$$\det(\varphi_{i+j}(x))_{i,j=0}^{n} = \det(\tilde{C}_n D_n \tilde{C}_n^{\,t}) = \prod_{i=0}^{n} [i]!\, q^{\binom{i}{2}} x^i,$$

womit (12) bewiesen ist. Wir müssen also nur mehr (24) zeigen. Das ist äquivalent mit

$$\sum a_{n,k}(x) a_{m,k}(x) q^{\binom{k}{2}} [k]!\, x^k = a_{m+n,0}$$

für alle $m, n \geq 0$. Diese Formel ergibt sich aber sofort aus (8) und (4) wenn man beachtet, dass $F(\bar{p}_k^{\,2}) = t_0 \dots t_{k-1} = x^k q^{\binom{k}{2}} [k]!$ gilt.

Aus (20) ergibt sich auch sehr leicht eine Rekursionsformel für die Exponentialpolynome $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_{n+1}(x) = x \sum \binom{n}{k} q^k \varphi_k\left(\frac{x}{q}\right) \tag{25}$$

Denn es ist dann

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(x) &= (x(1+\Delta))^{n+1} 1 = x((1+\Delta)x)^n (1+\Delta) 1 = x((1+\Delta)x)^n 1 \\ &= x(x + qxD + 1)^n 1 = x\varepsilon^{-1}(1 + q(x + xD))^n \varepsilon 1 \\ &= x \sum \binom{n}{k} q^k \varphi_k\left(\frac{x}{q}\right),\end{aligned}$$

wenn man $\varepsilon f(x) = f(qx)$ setzt.

Mit Hilfe dieser Formel ergibt sich sofort das zweite Resultat, wenn man beachtet, dass

$$\det(a_{i+j}) = \det\left(\sum_k \binom{i+j}{k} a_k\right) \tag{26}$$

gilt (vgl. z.B. [7] (2.39).

4

Wir wollen nun eine konkrete Version der entsprechenden orthogonalen Polynome finden. Sie sind nach den allgemeinen Überlegungen Polynome, die orthogonal sind bezüglich des linearen Funktionals F, das durch

$$F(x^n) = \varphi_n(a) = \sum S(n,k) a^k \tag{27}$$

definiert ist.

Es liegt daher nahe, statt dieses Funktionals gleich den linearen Operator U mit

$$Ux^n = \varphi_n(x) = \sum S(n,k)x^k \tag{28}$$

auf dem Vektorraum der Polynome zu betrachten. U ist ein sogenannter umbraler Operator in der Terminologie von Rota [11]. Er ist klarerweise invertierbar.

Aus (20) ergibt sich

$$U\underline{x}U^{-1} = \underline{x}(1+D).$$

Wir setzen nun $U^{-1}x^n = (x)_n$ und wollen diese Polynome berechnen. Wegen $Ux(x)_n = x(1+D)x^n = x^{n+1} + [n]x^n$ ist $x(x)_n = (x)_{n+1} + [n](x)_n$ und daher $(x)_{n+1} = (x-[n])(x)_n$. Es ergibt sich also

$$(x)_n = x(x-[1])[x-[2]) \ldots (x-[n-1]).$$

Das stimmt mit der in [3] verwendeten Terminologie überein. Sei weiters Δ der lineare Operator auf dem Vektorraum der Polynome, der durch

$$\Delta(x)_n = [n](x)_{n-1}$$

eindeutig festgelegt ist. Aus (28) ergibt sich dann sofort

$$x^n = \sum S(n,k)(x)_k. \tag{29}$$

Weiters gilt $U\Delta U^{-1} = D$.

Eine für das Folgende wichtige Gleichung ist auch die in [3] bewiesene Formel

$$\sum \binom{n}{k}(q-1)^k x^k = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(q-1)^k (x)_k, \tag{30}$$

von deren Richtigkeit man sich sofort überzeugt, wenn man x durch $(x-1)/(q-1)$ ersetzt.

Wendet man darauf den umbralen Operator U an, so ergibt sich

$$\sum \binom{n}{k}(q-1)^k \varphi_k(x) = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(q-1)^k x^k$$

und daraus die Formel

$$(q-1)^n \varphi_n(x) = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^{n-k} \sum_i (q-1)^i \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} x^i.$$

Wir behaupten nun, dass die bezüglich F orthogonalen Polynome $h_n(x,a)$ durch

$$h_n(x,a) = U^{-1}p_n(x,a)$$

gegeben sind, wobei $p_n(x,a) = (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a)$ ist. Denn beachtet man, dass $Dp_n(x,a) = [n]\,p_{n-1}(x,a)$ ist, so folgt

$$p_{n+1}(x,a) = (x-q^n a)p_n(x,a) = (\underline{x}(1+D) - q^n a)p_n(x,a) - \\ - [n](x-q^{n-1}a)p_{n-1}(x,a) - q^{n-1}[n]ap_{n-1}(x,a).$$

Wendet man darauf wieder U^{-1} an, so ergibt sich

$$h_{n+1}(x,a) = (x-[n]-q^n a)h_n(x,a) - [n]q^{n-1}ah_{n-1}(x,a). \tag{31}$$

Daraus folgt alles, speziell

$$F(h_m(x,a)h_n(x,a)) = [n]!a^n q^{\binom{n}{2}}\delta_{m,n}. \tag{32}$$

Aus der wohlbekannten Identität (vgl. z.B. [3])

$$p_n(x,a) = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} a^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}$$

ergibt sich schließlich

$$h_n(x,a) = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} a^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x)_{n-k}.$$

Unter Benützung des q-Analogons der Exponentialfunktion $e(x) = \sum \frac{x^k}{[k]!}$ ergibt sich daraus auch die Darstellung $h_n(x,a) = (1/e(a\Delta))(x)_n$.

Im Fall $q=1$ heißen die zu den Exponentialpolynomen gehörigen orthogonalen Polynome Poisson-Charlier-Polynome (vgl. [11]). Sie sind von der Gestalt

$$h_n(x,a) = \sum (-1)^k \binom{n}{k} a^k (x)_{n-k} = e^{-a\Delta}(x)_n.$$

Wir nennen daher in Analogie dazu die Polynome

$$h_n(x,a) := \frac{1}{e(a\Delta)}(x)_n = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} a^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x)_{n-k} \tag{33}$$

q-Charlierpolynome der ersten Art.

Bemerkung: Diese q-Charlierpolynome sind eng verwandt mit den Polynomen $U_n^{(a)}(x)$, die von Al-Salam und Carlitz in [2] studiert wurden (vgl. auch [6], (3.24.1), wo sie Al-Salam-Carlitz -I Polynome genannt werden). Genauer gilt

$$h_n(x,a) = (q-1)^{-n} U_n^{((q-1)a)}(1+(q-1)x).$$

Aus (2) und (33) folgt

$$\det\left(\varphi_{i+j+1}(a)\right)_{i,j=0}^{n-1} = q^{\binom{n}{2}} a^n \det\left(\varphi_{i+j}(a)\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

und aus (3) und (32) folgt (12). Damit ist Satz 1 wieder vollständig bewiesen.

5

Um den zweiten Teil des Satzes zu zeigen, betrachten wir die Polynome

$$\beta_n(a) = \frac{\varphi_{n+1}(a)}{a} = \sum \binom{n}{k} q^k \varphi_k\left(\frac{a}{q}\right). \tag{34}$$

Aus dem Lemma folgt, dass die zugehörigen normierten orthogonalen Polynome durch

$$\begin{aligned} q^n h_n\left(\frac{x-1}{q}, \frac{a}{q}\right) &= (x - [n] - q^{n-1}a) q^{n-1} h_{n-1}\left(\frac{x-1}{q}, \frac{a}{q}\right) \\ &\quad - [n-1] a q q^{n-2} h_{n-2}\left(\frac{x-1}{q}, \frac{a}{q}\right) \end{aligned}$$

gegeben sind. Aus (2) folgt nun unter Verwendung von (26)

$$\begin{aligned} \det(\beta_{i+j+1}(a))_0^n &= q^{n+1} h_{n+1}\left(-\frac{1}{q}, \frac{a}{q}\right) \det(\beta_{i+j}(a))_0^n = \\ &= q^{n+1} h_{n+1}\left(-\frac{1}{q}, \frac{a}{q}\right) \det\left(q^{i+j}\varphi_{i+j}\left(\frac{a}{q}\right)\right)_0^n = \\ &= q^{\binom{n+1}{3}+n(n+1)+n+1} \left(\frac{a}{q}\right)^{\binom{n+1}{2}} \prod_{k=0}^{n}([k]!) \\ &\qquad \sum q^{\binom{k}{2}-k} a^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} [n-k+1]! \frac{1}{q^{n-k+1}} \\ &= q^{\binom{n+2}{3}} a^{\binom{n+1}{2}} \prod_{k=0}^{n}([k]!) \sum q^{\binom{k}{2}} a^k \frac{[n+1]!}{[k]!}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\det(\varphi_{i+j+2})_0^n = q^{\binom{n+2}{3}} a^{\binom{n+2}{2}} \prod_{k=0}^{n}([k]!) \sum q^{\binom{k}{2}} a^k \frac{[n+1]!}{[k]!}.$$

Daraus ergibt sich (14).

6

Nun wollen wir Satz 2 beweisen.

Aus (11) ergibt sich

$$\Phi_n(x) = x\Phi_{n-1}(qx) + x\Phi'_{n-1}(x) \tag{35}$$

und daher

$$D^k\Phi_n(x) = q^k x D^k \Phi_{n-1}(qx) + [k]D^{k-1}\Phi_{n-1}(qx) + \\ + q^k x D^{k+1}\Phi_{n-1}(x) + [k]D^k\Phi_{n-1}(x)$$

Sei nun wie oben der Operator ε definiert durch $(\varepsilon f)(x) = f(qx)$. Dann gilt (vgl. [3]) $\varepsilon = D\underline{x} - \underline{x}D$, $D\varepsilon = q\varepsilon D$ und $\varepsilon\underline{x} = q\underline{x}\varepsilon$.

Daraus folgt

$$D^k\varepsilon = D^{k+1}\underline{x} - D^k\underline{x}D = q^k(q-1)\underline{x}D^{k+1} + q^kD^k.$$

Das liefert schließlich

$$\Phi_n^{(k)}(x) = q^{k-1}[k]\Phi_{n-1}^{(k-1)}(x) + ([k] + (q^{2k} + q^{2k-1} - q^{k-1})x) \\ \Phi_{n-1}^{(k)}(x) + q^k x(1 + (q-1)q^k x)\Phi_{n-1}^{(k+1)}(x)$$

mit $\Phi_n^{(n)}(x) = [n]!q^{\binom{n}{2}}$.

Setzt man

$$c_{n,k} = \frac{\Phi_n^{(k)}(x)}{[k]!q^{\binom{k}{2}}}, \tag{36}$$

so gilt

$$c_{n,k}(x) = c_{n-1,k-1}(x) + ([k] + (q^{2k} + q^{2k-1} - q^{k-1})x)c_{n-1,k} + \\ + q^{2k}[k+1](1 + (q-1)q^k x)x c_{n-1,k+1} \tag{37}$$

und daher ist $t_k = q^{2k}[k+1](1 + (q-1)q^k x)x$, woraus wieder sofort (15) folgt.

Mit (35) ergibt sich genau wo sie oben

$$\Phi_{n+1}(x) = x\sum \binom{n}{k} q^k \Phi_k(x). \tag{38}$$

Aus (26) folgt nun wieder (16).

7

Wir wollen auch hier den anderen Zugang skizzieren. Die entsprechenden q-Charlierpolynome wurden von Milne [9] eingeführt.

Sei $[x]_n = q^{-\binom{n}{2}}(x)_n = x(E^{-1}x)\dots(E^{-(n-1)}x)$, wobei $Ep(x) = p(qx+1)$ der q-Verschiebungsoperator (vgl. [3]) sei. Sei weiters δ definiert durch $\delta[x]_n = [n][x]_{n-1}$.

Dann sind diese q-Charlierpolynome gegeben durch

$$H_n(x,a) := \frac{1}{e(a\delta)}[x]_n = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} a^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [x]_{n-k}. \tag{39}$$

Wir suchen ein lineares Funktional F, welches

$$F(x^n) = F(\sum S(n,k)(x)_k) = \sum S(n,k) q^{\binom{k}{2}} a^k = \Phi_n(a) \tag{40}$$

erfüllt. Wir setzen daher

$$F([x]_n) = a^n.$$

Dann gilt $F([x]_k E^{-k}[x]_n) = a^k F([x]_n)$ für alle n und daher wegen der Linearität $F([x]_k p(x)) = a^k F(E^k p(x))$ für alle Polynome $p(x)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} F(H_n(x)p(x)) &= F(\sum (-1)^k q^{\binom{k}{2}} a^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [x]_{n-k} p(x)) = \\ &= a^n F(\sum (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} E^{n-k} p(x)) = a^n F((E-1) \\ &\quad (E-q)\dots(E-q^{n-1}))p(x) = \\ &= a^n F(q^{\binom{n}{2}}(1+(q-1)x)^n \Delta^n p(x)), \end{aligned}$$

wenn man die Identität [3] (40) benützt.

Daraus folgt

$$F(H_m H_n) = a^n [n]! F((1+(q-1)x)^n)\delta_{m,n}.$$

Aus (30) ergibt sich

$$\begin{aligned} F\left(\sum \binom{n}{k}(q-1)^k x^k\right) &= F\left(\sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(q-1)^k (x)_k\right) = \\ &= F(\sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k [x]_k) \\ &= \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k a^k = \\ &= \prod_{i=1}^{n}(1+(q-1)q^{i-1}a). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich schließlich für die normierten Polynome

$$\bar{H}_n(x,a) = q^{\binom{n}{2}} H_n(x,a) \text{ die Gleichung}$$

$$F(\bar{H}_m(x,a)\bar{H}_n(x,a)) = [n]!a^n q^{2\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n}(1+q^{i-1}(q-1)a)\delta_{m,n}. \quad (41)$$

Die Folge $H_n(x,a) := 1/e(a\delta)[x]_n$ ist also orthogonal bezüglich des linearen Funktionals F.

Aus (3) und (41) ergibt sich also (15). Ebenso folgt aus (2) und (39) schließlich (16).

Bemerkung: Es gilt $\bar{H}_n(x,a) = \bar{p}_n(1+(q-1)x: \ (1-q)a/q|q)$ $(q-1)^{-n}$ für die normierten Little q-Laguerre-Polynome $\bar{p}_n$ (vgl. [6] (3.20.1).

8

Um den zweiten Teil des Satzes zu zeigen, betrachten wir die Polynome

$$\mathrm{B}_n(a) = \frac{\Phi_{n+1}(a)}{a} = \sum \binom{n}{k} q^k \Phi_k(a). \quad (42)$$

Aus dem Lemma folgt, dass die zugehörigen normierten orthogonalen Polynome durch

$q^n\bar{H}_n((x-1)/q,a)$ gegeben sind. Aus (2) folgt nun

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{B}_{i+j+1}(a))_0^n &= q^{n+1}\bar{H}_{n+1}\left(-\frac{1}{q},a\right)\det(\mathrm{B}_{i+j}(a))_0^n \\
&= q^{n+1}\bar{H}_{n+1}\left(-\frac{1}{q},a\right)\det(q^{i+j}\Phi_{i+j}(a))_0^n \\
&= q^{n+1+n(n+1)+\binom{n+1}{2}}\det(\Phi_{i+j}(a))_0^n \times \sum q^{\binom{k}{2}} a^k \\
&\quad \times \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} [n-k+1]! \frac{q^{-\binom{n-k+1}{2}}}{q^{n-k+1}} \\
&= q^{2\binom{n+1}{2}}\det(\Phi_{i+j}(a))_0^n \cdot \sum q^{k(n+1)} a^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \\
&\quad \times [n-k+1]!
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\det(\varphi_{i+j+2})_0^n = q^{2\binom{n+1}{2}} a^{n+1}\det(\Phi_{i+j}(a))_0^n \\
\times \sum q^{k(n+1)} a^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} [n-k+1]!
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich (17).

Literatur

[1] M. Aigner, A Characterization of the Bell Numbers, Discrete Mathematics **205**, 207–10 (1999).

[2] W. A. Al-Salam & L. Carlitz, Some orthogonal q-polynomials, Math. Nachr. **30**, 47–61 (1965).

[3] J. Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten, Monatshefte Math. **88**, 87–105 (1979).

[4] Ph. Delsarte, Nombres de Bell et polynômes de Charlier, C.R.A.S. de Paris **287**, 271–73 (1978).

[5] Ph. Flajolet, On congruences and continued fractions for some combinatorial quantities, Discrete Math. **41**, 141–53 (1982).

[6] R. Koekoek & R. F. Swarttouw, The Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogues, ftp://ftp.twi.tudelft.nl/TWI/publications/tech-reports/1988/DUT-TWI-98-17.ps.gz

[7] C. Krattenthaler, Advanced Determinant Calculus, Sémin. Lotharingien Combin. **42**, B42q (1998).

[8] B. Leclerc, On certain formulas of Karlin and Szegö, Sémin. Lotharingien Combin. **41**, B41d (1998).

[9] St.C. Milne, A q-analog of restricted growth functions, Dobinskys equality, and Charlier polynomials, TAMS **245**, 89–118 (1978).

[10] C. Radoux, Determinants de Hankel et théorème de Sylvester, Sémin. Lotharingien Combin. **28**, 115–22 (1992).

[11] G. C. Rota, Finite Operator Calculus, Academic Press 1975.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. J. Cigler, Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofgasse 4, 1090- Wien.