Sitzungsber. Abt. II (2001) 210: 33–59

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Reelle Polynome in $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a}$ $(a, z \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{R})$ als Lösungen von q-Operatorgleichungen zweiter Ordnung

Von

P. A. Lesky

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 3. Mai 2001
durch das w. M. Leopold Vietoris)

Abstract

The explicit form and the three term recurrence relation for *all* the polynomial solutions in $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a}$ $(a, z \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{R})$ from q-operator equations of second order are given.

Mathematics Subject Classification (2000): 33C45.
Key words: q-operator equations, q-polynomials.

1. Einleitung

Im Report „The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue“ von R. Koekoek und R. F. Swarttouw ([1]) treten bei der Erweiterung des Askey-Schemas auf q-Polynome 29 Typen von reellen q-Polynomen auf, die jeweils aus gewissen Orthogonalitätsfunktionalen hervorgehen. Die offensichtlich vorhandene Heterogenität läßt sich über Eigenwertprobleme mit q-Operatorgleichungen zweiter Ordnung beseitigen. Dabei zeigt sich, daß alle im erweiterten Schema vorkommenden Polynomtypen im wesentlichen aus *zwei* q-Operatorgleichungen zweiter Ordnung entstehen.

Im genannten Report [1] erfolgt die grundsätzliche Voraussetzung $0 < q < 1$; hier wird zunächst $q \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$ zugelassen. Dadurch besteht die (häufig genützte) Möglichkeit von q auf $\frac{1}{q}$ überzugehen. Außerdem wird in dieser Arbeit noch keine Rücksicht auf die Realisierung der Orthogonalitätsfunktionale genommen.

Folgende *Einteilung* der 29 Typen aus [1] und der (vorläufig) fünf Zusatztypen erscheint zweckmäßig:

I. Polynome in x als Lösungen reeller q-Operatorgleichungen ($x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$)

1 Big q-Jacobi	6 Little q-Laguerre
2 Little q-Jacobi	7 Stieltjes-Wigert
3 Alternative q-Charlier	8 Al Salam-Carlitz I
4 Big q-Laguerre	9 Al Salam-Carlitz II
5 q-Laguerre	10 Discrete q-Hermite I

Bemerkung: Al Salam-Carlitz I geht mit $q \to \frac{1}{q}$ in Al Salam-Carlitz II über.

II. Polynome in q^{-x} als Lösungen reeller q-Operatorgleichungen ($x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

11 q-Hahn	14 Affine q-Krawtchouk
12 q-Krawtchouk	15 Quantum q-Krawtchouk
13 q-Charlier II (nicht im *R.*)	16 q-Meixner

17 q-Charlier I

III. Polynome in $q^{-x} + uq^x$ als Lösungen reeller q-Operatorgleichungen (x, $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

18 q-Racah	20 Dual q-Hahn
19 Dual q-Racah (nicht im *R.*)	21 Dual q-Krawtchouk

22 Dual q-Charlier II (nicht im Rep.)

IV. Reelle Polynome in $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a}$ als Lösungen komplexer q-Operatorgleichungen ($z \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$)

IV.1 $a \in \mathbb{R}$

23 Askey-Wilson	26 Continous big q-Hermite I
24 Continuous dual q-Hahn	27 Continuous q-Jacobi
25 Al Salam-Chihara	28 Continuous q-Laguerre

IV.2 $a \in \mathbb{C}$

29 Continuous q-Hahn I	31 q-Meixner-Pollaczek (erweitert)
30 Continuous q-Hahn II (nicht im Rep.)	32 Continuous big q-Hermite II (nicht im Rep.)

V. Reelle Polynome als Lösungen komplexer q-Operatorgleichungen

33 Continuous q-Hermite	34 Discrete q-Hermite II

Bemerkung: Die q-Operatorgleichungen von 1), 2), 3), 11), 12), 13), 18), 19), 23), 27) und 29) enthalten die Eigenwerte $\lambda_n = q^{-n} - 1 + u(q^n - 1)$ im Gegensatz zu den übrigen mit den Eigenwerten $\lambda_n = q^{-n} - 1$. Die zuerst genannten Eigenwerte werden bei der Dualität eine entscheidende Rolle spielen.

2. Motivation für Polynome in $q^{-x} + uq^x (x, u \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$ mit Hilfe der Dualität

Auf D.A. Leonhard ([2]) geht die folgende Erklärung dualer Polynomsysteme zurück.

Definition 1. Die reellwertigen Funktionen κ_x und λ_x sind für alle x aus $\mathbb{R}$ erklärt, wobei $\kappa_n \neq \kappa_m$ und $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$ ($n, m = 0, 1, \ldots, N$; $N \in \mathbb{N}$; $N \to \infty$ zugelassen) gelten. Die κ_x und λ_x werden *Eigenfunktionen*, die κ_n und λ_n *Eigenwerte* genannt. Ferner liegen die Polynome $y_n(\kappa_x)$ und $z_n(\lambda_x)$ vom n-ten Grad in κ_x und λ_x mit reellen Koeffizienten vor, die durch

$$y_n(\kappa_0) = z_n(\lambda_0) = 1 \quad (n = 0, 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

aufeinander abgestimmt sind. Die Polynomsysteme $\{y_n(\kappa_x)\}$ und $\{z_n(\lambda_x)\}$ heißen *bezüglich* κ_x *und* λ_x *dual*, wenn

$$y_n(\kappa_m) = z_m(\lambda_n) \quad (n, m = 0, 1, \ldots, N) \tag{2.2}$$

gilt. Bei Übereinstimmung von $y_n(\kappa_m)$ mit $y_m(\kappa_n)$ für $n, m = 0, 1, \ldots, N$ heißt das Polynomsystem $\{y_n(\kappa_x)\}$ bezüglich κ_x selbstdual.

Bemerkung. Die Definition 1 kann problemlos auf komplexwertige Funktionen κ_x und λ_x über $\mathbb{C}$ erweitert werden.

Für die q-Hahnpolynome $y_n^H(x)$ besteht nach [1] die q-Operatorgleichung

$$C(x)y_n^H(x+1) - \{C(x) + D(x)\}y_n^H(x) + D(x)y_n^H(x-1) = \lambda_n y_n^H(x) \tag{2.3}$$

mit

$$C(x) = (1 - q^{x-N})(1 - \alpha q^{x+1}), \quad D(x) = \alpha q(1 - q^x)(\beta - q^{x-N-1}),$$
$$\lambda_n = q^{-n} - 1 + \alpha\beta q(q^n - 1) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R};\ n = 0, 1, \ldots, N;\ q \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}).$$

Die Verschiedenheit der Eigenwerte λ_n erreicht man durch

$$\alpha\beta \neq q^{-n-m-1} \quad (n, m = 0, 1, \ldots, N). \tag{2.4}$$

Die q-Hahnpolynome liegen in x vor, daher setzt man als erste Eigenfunktion $\kappa_x = x$. Die entsprechenden Eigenwerte $\kappa_n = n$ sind für $n = 0, 1, \ldots, N$ automatisch untereinander verschieden.

Die Konstruktion der Dualen q-Hahnpolynome $z_n^D(\lambda_x)$ kann mit Hilfe von (2.3) erfolgen. Beschränkt man sich bei (2.3) auf $x = m$ $(m = 0, 1, \ldots, N)$, dann entsteht

$$\begin{aligned} C(m) y_n^H(m+1) - \{C(m) + D(m)\} y_n^H(m) \\ + D(m) y_n^H(m-1) = \lambda_n y_n^H(m). \end{aligned}$$

Im Sinne von (2.2) soll $y_n^H(m) = z_m^D(\lambda_n)$ erreicht werden, wozu man auf

$$C(m) z_{m+1}^D(\lambda_n) - \{C(m) + D(m)\} z_m^D(\lambda_n) + D(m) z_{m-1}^D(\lambda_n) = \lambda_n z_m^D(\lambda_n)$$

übergeht. Dann können aus

$$\begin{aligned} C(n) z_{n+1}^D(\lambda_x) - \{C(n) + D(n)\} z_n^D(\lambda_x) \\ + D(n) z_{n-1}^D(\lambda_x) = \lambda_x z_n^D(\lambda_x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Polynome $z_n^D(\lambda_x)$ bestimmt werden, für die (2.2) gilt. Dazu setzt man $z_0^D(\lambda_x) = 1$, hat nach (2.3) $D(0) = 0$ und verlangt außerdem

$$(C(n) =)(1 - q^{n-N})(1 - \alpha q^{n+1}) \neq 0 \quad \text{für } n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2.6}$$

Dann gehen aus (2.5) Polynome $z_n^D(\lambda_x)$ vom n-ten Grad in $\lambda_x (n = 1, 2, \ldots, N)$ hervor, für die bereits wegen der vorgenommenen Konstruktion $z_n^D(\lambda_0) = 1$ gilt. Werden die q-Hahnpolynome noch so normiert, daß $y_n^H(0) = 1$ gilt, dann stellen $\{y_n^H(x)\}$ und $\{z_n^D(\lambda_x)\}$ bezüglich der Eigenfunktionen $\kappa_x = x$ und $\lambda_x = q^{-x} - 1 + \alpha\beta q\, (q^x - 1)$ duale Polynomsysteme dar (bestehend aus q-Hahnpolynomen und Dualen q-Hahnpolynomen).

Damit ist die Untersuchung von Systemen von Polynomen in $q^{-x} + u q^x$ motiviert.

3. q-Operatorgleichungen zweiter Ordnung

Man geht von dem Eigenwertproblem

$$p(qz)(A_q^2 \hat{y}_n(.))(z) + q^*(qz)(A_q \hat{y}_n(.))(z) = \hat{r}(qz) \lambda_n \hat{y}_n(qz) \tag{3.1}$$

aus; darin bedeuten p, q^* und $\hat{r}$ Funktionen in z $(z \in \mathbb{C})$, A_q den *Hahnoperator*

$$(A_q \hat{y}_n(.))(z) = \frac{\hat{y}_n(qz) - \hat{y}_n(z)}{(q-1)z} \quad (q \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}) \tag{3.2}$$

und $A_q^2 = A(A_q)$. Gesucht sind Eigenwerte λ_n und Koeffizienten p, q^* und $\hat{r}$, so daß zu jedem Eigenwert λ_n genau eine (bis auf einen von z unabhängigen Faktor) eindeutige Polynomlösung $y_n(z)$ vom n-ten Grad in z existiert ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Nach Berechnung von

$$(A_q^2 \hat{y}_n(.))(z) = \frac{\hat{y}_n(q^2 z) - (1+q)\hat{y}_n(qz) + q\hat{y}_n(z)}{q(q-1)^2 z^2}$$

ergibt sich für die q-Operatorgleichung (3.1) die Form

$$\hat{C}(qz)\hat{y}_n(q^2 z) - \{\hat{C}(qz) + \hat{D}(qz)\}\hat{y}_n(qz) + \hat{D}(qz)\hat{y}_n(z) = \hat{r}(qz)\lambda_n \hat{y}_n(qz),$$

mit

$$\hat{C}(qz) = \frac{p(qz)}{q(q-1)^2 z^2}, \quad \hat{D}(qz) = \frac{p(qz) - (q-1)zq^*(qz)}{(q-1)^2 z^2}.$$

Es ist vorteilhaft, durch Übergang von qz auf z eine “symmetrische” Form herzustellen:

$$\hat{C}(z)\hat{y}_n(qz) - \{\hat{C}(z) + \hat{D}(z)\}\hat{y}_n(z) + \hat{D}(z)\hat{y}_n\left(\frac{z}{q}\right) = \hat{r}(z)\lambda_n \hat{y}_n(z)$$

$$\hat{C}(z) = \frac{qp(z)}{(q-1)^2 z^2}, \quad \hat{D}(z) = \frac{q^2 p(z) - q(q-1)zq^*(z)}{(q-1)^2 z^2}. \tag{3.3}$$

Bei positiv reellem z kann durch die *Variablentransformation*

$$z = q^x \quad (x \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\},\ z \in \mathbb{R}^+) \tag{3.4}$$

die Ersetzung der Argumente qz und $\frac{z}{q}$ in (3.3) durch $x+1$ und $x-1$ erreicht werden:

$$\begin{aligned} \hat{y}_n(qz) &= \hat{y}_n(q^{x+1}) = y_n(x+1), \\ \hat{y}_n\left(\frac{z}{q}\right) &= \hat{y}_n(q^{x-1}) = y_n(x-1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Neben $\hat{y}_n(z) = \hat{y}_n(q^x) = y_n(x)$ setzt man noch

$$\begin{aligned} \hat{C}(z) = \hat{C}(q^x) = C(x), \quad \hat{D}(z) &= \\ = \hat{D}(q^x) = D(x), \quad \hat{r}(z) &= \hat{r}(q^x) = r(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

so daß zur weiteren Bearbeitung folgende q-Operatorgleichung vorliegt:

$$\begin{aligned} C(x)y_n(x+1) &- \{C(x) + D(x)\}y_n(x) \\ &+ D(x)y_n(x-1) = r(x)\lambda_n\, y_n(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

4. Polynomlösungen in $q^{-x} + uq^{x}(x, u \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^{+}\setminus\{1\})$

Es wird nun festgestellt, welche Form die $C(x)$, $D(x)$, $r(x)$ und λ_n aus (3.7) haben müssen, damit zu jedem Eigenwert λ_n genau eine (bis auf einen von x unabhängigen Faktor) eindeutige Polynomlösung $y_n(x)$ vom n-ten Grad in $q^{-x}+uq^{x}$ existiert. Dazu erfolgt entsprechend der q-Theorie ([1]) der Ansatz

$$y_n(x) = \sum_{k=o}^{n} \frac{(q^{-x};q)_k(uq^{x};q)_k}{(q;q)_k}\, a_{n,k} \quad (n=0,1,2,\ldots;a_{n,n}\neq 0) \tag{4.1}$$

mit $(q^{-x};q)_0 = 1$, $(q^{-x};q)_k = (1-q^{-x})(1-q^{-x+1})\ldots(1-q^{-x+k-1})$ $(k \in \mathbb{N})$ usw. Man überlegt sich leicht, daß die Summe Polynome n-ten Grades in $q^{-x}+uq^{x}$ liefert.

Die Berechnung der Differenzen $y_n(x+1)-y_n(x)$ und $y_n(x)-y_n(x-1)$ aus (3.7) unter Heranziehung von (4.1) liefert von k unabhängige Faktoren, die zu einer ersten Vereinfachung von (3.7) führen. Man erhält

$$\begin{aligned}&(q^{-x-1};q)_k(uq^{x+1};q)_k - (q^{-x};q)_k(uq^{x};q)_k\\ &\quad= \frac{1-q^{k}}{q^{x+1}}(uq^{2x+1}-1)(q^{-x};q)_{k-1}(uq^{x+1};q)_{k-1}\end{aligned} \tag{4.2}$$

und setzt für die *erste Vereinfachung*

$$\begin{aligned}&C(x) = q(uq^{2x-1}-1)C^{*}(x), \quad D(x) = (uq^{2x+1}-1)D^{*}(x),\\ &r(x) = \frac{(uq^{2x-1}-1)(uq^{2x+1}-1)}{q^{x}}r^{*}(x).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Dann bleibt nach dem Einsetzen von (4.1) in (3.7) und nach Kürzung durch $(uq^{2x-1}-1)(uq^{2x+1}-1)q^{-x}$ (zunächst wird $uq^{2x\pm 1}\neq 1$ vorausgesetzt)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{(q^{-x};q)_{k-1}(uq^{x+1};q)_{k-1}}{(q,q)_{k-1}}C^{*}(x) - \frac{(q^{-x+1};q)_{k-1}(uq^{x};q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}D^{*}(x)a_{n,k}\\ &\quad= r^{*}(x)\lambda_n y_n(x).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Zur *zweiten Vereinfachung* wird

$$\begin{aligned}&(q^{-x};q)_{k-1}(uq^{x+1};q)_{k-1} - (q^{-x+1};q)_{k-1}(uq^{x};q)_{k-1}\\ &\quad= \frac{1-q^{k-1}}{q^{x}}(uq^{2x}-1)(q^{-x+1};q)_{k-2}(uq^{x+1};q)_{k-2}\end{aligned} \tag{4.5}$$

berechnet und

$$C^*(x) - D^*(x) = \frac{uq^{2x}-1}{q^x} B(x), \quad r^*(x) = \frac{uq^{2x}-1}{q^x} r^{**}(x) \qquad (4.6)$$

gesetzt; außerdem kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r^{**}(x) = q$ festgelegt werden. Damit geht aus (4.4) nach Kürzung durch $(uq^{2x}-1)q^{-x}$ (zunächst wird $uq^{2x} \neq 1$ vorausgesetzt)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(q^{-x+1};q)_{k-1}(uq^x;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}} B(x)\ a_{n,k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(q^{-x+1};q)_{k-2}(uq^{x+1};q)_{k-2}}{(q;q)_{k-2}} C^*(x) a_{n-k} = \lambda_n q \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-x};q)_k (uq^x;q)_k}{(q;q)_k} a_{n,k} \qquad (4.7)$$

hervor ($n = 2, 3, 4, \ldots$; bei $n = 1$ entfällt die zweite Summe).

Für $n = 0$ mit $y_0(x) = a_{0,0} (\neq 0)$ ergibt sich aus (3.7) $\lambda_0 = 0$.

Für $n = 1$ mit $y_1(x) = a_{1,0} + \frac{1+u-(q^{-x}+uq^x)}{1-q} a_{1,1} (a_{1,1} \neq 0)$ entsteht aus (4.7)

$$B(x) a_{1,1} = \lambda_1 q \left\{ a_{1,0} + \frac{1+u-(q^{-x}+uq^x)}{1-q} a_{1,1} \right\}.$$

Im Hinblick auf die Verschiedenheit der Eigenwerte wird $\lambda_1 \neq 0$ vorausgesetzt, so daß $B(x)$ folgende Form erhält:

$$B(x) = v + (1-q^{-x})(1-uq^x) w \quad (v, w \in \mathbb{R};\ w \neq 0). \qquad (4.8)$$

Zur *dritten Vereinfachung* wird $B(x)$ in die erste Summe von (4.7) eingesetzt, so daß für diese

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(q^{-x};q)_{k-1}(uq^x;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}} \{vq^{k-1} + w((1-u)(1-q^{k-1}) + (1-q^{-x})(1-uq^x))\} a_{n,k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(q^{-x+1};q)_{k-2}(uq^{x+1};q)_{k-2}}{(q;q)_{k-2}} \cdot \{v(1-uq^x) - w(1-q^{-x})^2(1-uq^x)\} a_{n,k} \qquad (4.9)$$

entsteht. Jetzt erkennt man, daß (4.7) nur dann bestehen kann, wenn $C^*(x)$ den Term $\{-v + w(1-q^{-x})^2\}(1-uq^x)$ und $(1-q^{-x})(1-q^{-x+1})\ (1-uq^x)(1-uq^{x+1})$ enthält:

$$C^*(x) = \{-v + w(1-q^{-x})^2 + \sigma(1-q^{-x}) + \tau(1-q^{-x})(1-q^{-x+1})(1-uq^{x+1})\}(1-uq^x) \qquad (4.10)$$

($\sigma,\ \tau \in \mathbb{R}$). Wird noch $D(x)$ mit Hilfe von (4.3), (4.6) und (4.10) berechnet, dann ergibt sich der folgende Satz:

Satz 1. Die q-Operatorgleichung (3.7) kann nur dann Polynomlösungen $y_n(x)$ aller Grade n in $q^{-x}+uq^x$ ($n=0,1,2,\ldots$) besitzen, wenn ihre Koeffizienten die Form

$$C(x) = q(uq^{2x-1} - 1)(1 - uq^x)\{-v + w(1 - q^{-x})^2 + \sigma(1 - q^{-x}) + \tau(1 - q^{-x})(1 - q^{-x+1})(1 - uq^{x+1})\}, \tag{4.11}$$

$$D(x) = (uq^{2x+1} - 1)(1 - q^{-x})\{-v + w(1 - uq^x)^2 + \sigma(1 - uq^x) + \tau(1 - q^{-x+1})(1 - uq^x)(1 - uq^{x+1})\}, \tag{4.12}$$

$$r(x) = (uq^{2x-1} - 1)(uq^{2x} - 1)(uq^{2x+1} - 1)q^{-2x+1} \tag{4.13}$$

haben ($u, v, w, \sigma, \tau \in \mathbb{R};\ w \neq 0;\ q \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$).

Im Rahmen dieses Satzes können die Einschränkungen $uq^{2x\pm1} \neq 1$ und $uq^{2x} \neq 1$ entfallen.

Nach dem Einsetzen von $C^*(x)$ in (4.7) und Berücksichtigung von (4.9) ergeben sich durch "Koeffizientenvergleich" bei $(q^{-x}+uq^x)^n$ die Eigenwerte

$$\lambda_n = (q^{-n} - 1)\{w + \tau q(1 - q^{n-1})\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.14}$$

Wegen $w \neq 0$ hat man nach Satz 1 im wesentlichen vier Fälle:

a) $\tau \neq 0$ (darunter fallen die Polynome *q-Racah* und *Dual q-Racah*)
b) $\tau = 0$ liefert drei Unterfälle:

- b.1) $w - v + \sigma \neq 0$ (darunter fallen die Polynome *Dual q-Hahn*)
- b.2) $w - v + \sigma = 0$, $\sigma \neq -2w$ (darunter fallen die Polynome *Dual q-Krawtchouk*)
- b.3) $w - v + \sigma = 0$, $\sigma = -2w$ (darunter fallen die Polynome *Dual q-Charlier II*)

Die $C(x)$ und $D(x)$ aus dem Satz 1 können noch wesentlich vereinfacht werden. Aus (4.11) entsteht

$$\begin{aligned} q^{2x}C(x) = q(uq^{2x-1} - 1)(1 - uq^x) &\cdot \{w + \tau q - [2w + \sigma + \tau(1 + q + uq^2)]q^x \\ &+ [-v + w + \sigma + \tau(1 + uq + uq^2)]q^{2x} - \tau uq^{3x+1}\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

und entsprechend aus (4.12)

$$\begin{aligned} q^{2x}D(x) = (uq^{2x+1} - 1)(1 - q^x) \\ \cdot \{\tau q - [-v + w + \sigma + \tau(1 + uq + uq^2)]q^x \\ + [(2w + \sigma)u + \tau(1 + q + uq^2)u]q^{2x} \\ - (w + \tau q)u^2 q^{3x}\}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

a) $\tau \neq 0$: Für den Teil in der geschlungenen Klammer von (4.15) ergibt sich

$$\begin{aligned} w + \tau q - [2w + \sigma + \tau(1 + q + uq^2)]q^x \\ + [-v + w + \sigma + \tau(1 + uq + uq^2)]q^{2x} - \tau u q^{3x+1} \\ = (1 - x_1 q^x)(1 - x_2 q^x)(1 - x_3 q^x) \end{aligned} \tag{4.17}$$

mit

$$\begin{aligned} \tau = \frac{x_1 x_2 x_3}{uq},\ w = 1 - \frac{x_1 x_2 x_3}{u}, \\ \sigma = x_1 + x_2 + x_3 - 2 - \frac{x_1 x_2 x_3}{uq}(1 - q + uq^2), \\ v = (x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dann liefert die geschlungene Klammer von (4.16) unter Verwendung von (4.18)

$$\begin{aligned} \tau q - [-v + w + \sigma + \tau(1 + uq + uq^2)]q^x \\ + [(2w + \sigma)u + \tau(1 + q + uq^2)u]q^{2x} - (w + \tau q)u^2 q^{3x} \\ = (x_1 - uq^x)(x_2 - uq^x)(x_3 - uq^x)u^{-1}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

b.1) $\tau = 0,\ w - v + \sigma \neq 0$: Für den Teil in der geschlungenen Klammer von (4.15) ergibt sich

$$\begin{aligned} w - (2w + \sigma)q^x + (-v + w + \sigma)q^{2x} \\ = (1 - x_1 q^x)(1 - x_2 q^x) \end{aligned} \tag{4.20}$$

mit

$$\begin{aligned} w = 1, \quad \sigma = x_1 + x_2 - 2, \\ v = -(x_1 - 1)(x_2 - 1). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Dann liefert die geschlungene Klammer von (4.16) unter Verwendung von (4.21)

$$\begin{aligned} -(-v + w + \sigma)q^x + (2w + \sigma)uq^{2x} - wu^2 q^{3x} \\ = -(x_1 - uq^x)(x_2 - uq^x)q^x. \end{aligned} \tag{4.22}$$

b.2) $\tau = 0, \ \ w - v + \sigma = 0, \ \ \sigma \neq -2w$: Für den Teil in der geschlungenen Klammer von (4.15) ergibt sich

$$w - (2w + \sigma)q^x = 1 - x_1 q^x \tag{4.23}$$

mit

$$w = 1, \quad \sigma = x_1 - 2, \quad v = x_1 - 1. \tag{4.24}$$

Dann liefert die geschlungene Klammer von (4.16) unter Verwendung von (4.24)

$$(2w + \sigma)uq^{2x} - wu^2 q^{3x} = uq^{2x}(x_1 - uq^x). \tag{4.25}$$

b.3) $\tau = 0, \ \ w - v + \sigma = 0, \ \ \sigma = -2w$: Für den Teil in der geschlungenen Klammer von (4.15) ergibt sich $w = 1$ ($\sigma = -2$, $v = -1$) und für den Teil in der geschlungenen Klammer von (4.16) $-u^2q^{3x}$, wenn $w = 1$ berücksichtigt wird.

Diese Ergebnisse werden im folgenden Satz 2 zusammengefaßt.

Satz 2. Die q-Operatorgleichung

$$q^{2x}C(x)y_n(x+1) - q^{2x}\{C(x) + D(x)\}y_n(x) + q^{2x}D(x)y_n(x-1)$$
$$= (uq^{2x-1} - 1)(uq^{2x} - 1)(uq^{2x+1} - 1)q\lambda_n y_n(x) \tag{4.26}$$

kann nur dann Polynomlösungen $y_n(x)$ aller Grade n in $q^{-x} + uq^x$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$ haben, wenn Ihre Koeffizienten die Form

$$q^{2x}C(x) = q(uq^{2x-1} - 1)(1 - uq^x) \left\langle \begin{array}{l} (1 - x_1q^x)(1 - x_2q^x)(1 - x_3q^x), \\ (1 - x_1q^x)(1 - x_2q^x), \\ (1 - x_1q^x), \\ 1; \end{array} \right.$$

$$q^{2x}D(x) = (uq^{2x+1} - 1)(1 - q^x) \left\langle \begin{array}{l} (x_1 - uq^x)(x_2 - uq^x)(x_3 - uq^x)u^{-1}, \\ -(x_1 - uq^x)(x_2 - uq^x)q^x, \\ (x_1 - uq^x)uq^{2x}, \\ -u^2q^{3x}; \end{array} \right.$$

$$\lambda_n = (q^{-n} - 1) \left\langle \begin{array}{l} 1 - \dfrac{x_1x_2x_3}{u} q^{n-1}, \\ 1, \\ 1, \\ 1 \end{array} \right.$$

haben ($u, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$; $u \neq 0$; $q \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$; jeweils die gleichen Positionen gehören zusammen).

Darin sind folgende q-Operatorgleichungen aus dem Report [1] enthalten:

q-Racah (18) mit $u = \alpha\beta q$, $x_1 = \alpha q$, $x_2 = \beta\delta q$, $x_3 = \gamma q (= q^{-N})$.
Dual q-Hahn (20) mit $u = \alpha\beta q$, $x_1 = \alpha q$, $x_2 = q^{-N}$.
Dual q-Krawtchouk (21) mit $u = -p$, $x_1 = q^{-N}$.

Der vierte Fall b.3) liefert die q-Operatorgleichung für *Dual q-Charlier II* (22) (im Report nicht enthalten). Die Polynome *Dual q-Racah* (19) (im Report nicht enthalten) werden bei der Ermittlung der dreigliedrigen Rekursionen behandelt.

Bemerkung: Man beachte, daß mit *q-Racah*, *Dual q-Hahn* und *Dual q-Krawtchouk* keineswegs nur *endliche Systeme* entstehen. Im Report [1] wird durch $q^{-N} (N \in \mathbb{N})$ immer die Endlichkeit erzwungen, was keineswegs notwendig ist.

5. Polynomlösungen in $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a} \, (a, u, z \in \mathbb{C})$

Aus $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a}$ läßt sich folgendermaßen eine reelle Variable herstellen: Man setzt

$$z = e^{i\theta},\ a = \alpha e^{-i\phi} (\theta, \phi \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_0^+),\ u = a\,.\,\bar{a} = \alpha e^{-i\phi}.\,\alpha e^{i\phi} = \alpha^2 \tag{5.1}$$

und erhält

$$\frac{a}{z} + \frac{uz}{a} = \alpha e^{-i(\theta+\phi)} + \alpha e^{i(\theta+\phi)} = 2\alpha \cos(\theta + \phi). \tag{5.2}$$

Die mit (3.4) durchgeführte Überlegung für den Übergang von qx auf $x+1$ und $\frac{x}{q}$ auf $x-1$ ist hier nicht mehr möglich, so daß die q-Operatorgleichung (3.3) verwendet werden muß.

Entsprechend der q-Theorie ([1]) erfolgt der Ansatz

$$\hat{y}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{a}{z}; q)_k (\bar{a}z; q)_k}{(q; q)_k} a_{n,k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; a_{n,n} \neq 0). \tag{5.3}$$

Man erkennt leicht, daß die Summe bei reellen $a_{n,k}$ reelle Polynome n-ten Grades in $\frac{a}{z} + \bar{a}z (= 2\alpha \cos(\theta + \phi))$ liefert. Die Überlegungen aus dem 4. Abschnitt lassen sich schrittweise auf diesen Fall übertragen, wobei einfach q^x durch $\frac{z}{a}$ und uq^x durch $\bar{a}z$ zu ersetzen ist. Damit hat man

Satz 3. Die q-Operatorgleichung

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z)\hat{y}_n(qz) - \frac{z^2}{a^2}\{\hat{C}(z)+\hat{D}(z)\}\hat{y}_n(z) + \frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z)\hat{y}_n(z) = \left(\frac{\bar{a}}{a}z^2 - q\right)\left(\frac{\bar{a}}{a}z^2 - 1\right)\left(\frac{\bar{a}q}{a}z^2 - 1\right)\lambda_n\hat{y}_n(z) \tag{5.4}$$

kann nur dann Polynomlösungen $\hat{y}_n(z)$ aller Grade n in $\frac{a}{z}+\bar{a}z(=2\alpha\cos(\theta+\phi))$ besitzen, wenn ihre Koeffizienten die Form

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = \left(\frac{a}{\bar{a}}z^2 - q\right)(1-\bar{a}z)\left\{\begin{array}{l}\left(1-\frac{z_1z}{a}\right)\left(1-\frac{z_2z}{a}\right)\left(1-\frac{z_3z}{a}\right),\\ \left(1-\frac{z_1z}{a}\right)\left(1-\frac{z_2z}{a}\right),\\ \left(1-\frac{z_1z}{a}\right),\\ 1\end{array}\right.$$

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = \left(\frac{aq}{\bar{a}}z^2 - 1\right)\left(1-\frac{z}{a}\right)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{a\bar{a}}(z_1-\bar{a}z)(z_2-\bar{a}z)(z_3-\bar{a}z),\\ -\frac{z}{a}(z_1-\bar{a}z)(z_2-\bar{a}z),\\ \frac{\bar{a}}{a}z^2(z_1-\bar{a}z),\\ -\frac{\bar{a}^2}{a}z^3;\end{array}\right.$$

$$\lambda_n = (q^{-n}-1)\left\{\begin{array}{l}1-\frac{z_1z_2z_3}{a\bar{a}}q^{n-1},\\ 1,\\ 1,\\ 1\end{array}\right.$$

haben ($a, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$; $q \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$; jeweils die gleichen Positionen gehören zusammen).

I) Zuerst wird a *reell* ($\phi=0$, $z=e^{i\theta}$) betrachtet.

23) Setzt man im ersten Fall $z_1=ab$, $z_2=ac$, $z_3=ad$ (z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{R}$), dann entsteht aus (5.4) die q-Operatorgleichung zu *Askey-Wilson*:

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (z^2-q)(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz),$$

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = (qz^2-1)(z-a)(z-b)(z-c)(z-d),$$

$$\text{Störglied}: (z^2-q)(z^2-1)(qz^2-1)(q^{-n}-1)(1-abcdq^{n-1}).$$

24) Setzt man im zweiten Fall $z_1 = ab$ und $z_2 = ac(z_1, z_2 \in \mathbb{R})$, dann entsteht aus (5.4) die q-Operatorgleichung zu *Continuous dual q-Hahn*:

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (z^2-q)(1-az)(1-bz)(1-cz),$$
$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = (qz^2-1)(z-a)(z-b)(z-c)z,$$
$$\text{Störglied}: (z^2-q)(z^2-1)(qz^2-1)(q^{-n}-1).$$

25) Setzt man im dritten Fall $z_1 = ab$ ($z_1 \in \mathbb{R}$), dann entsteht aus (5.4) die q-Operatorgleichung zu *Al Salam-Chihara*:

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (z^2-q)(1-az)(1-bz),$$
$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = (qz^2-1)(z-a)(z-b)z^2, \text{ Störglied wie bei 24).}$$

Bemerkung. Die Koeffizienten z_1, z_2 und z_3 bleiben *reell*, wenn unter den a, b, c und d *konjugiert komplexe* Parameter vorkommen. Wie sich dabei das komplexe a im Gegensatz zur Voraussetzung in I) auswirkt, wird noch im Abschnitt 7 zu untersuchen sein.

26) Im vierten Fall entsteht aus (5.4) die q-Operatorgleichung von *Continuous big q-Hermite I*:

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (z^2-q)(1-az), \quad \frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = (qz^2-1)(z-a)z^3;$$
Störglied wie bei 24).

II) $a = \alpha e^{-i\phi}$ wird *komplex* zugelassen ($z = e^{i\theta}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

29) Aus dem ersten Fall von (5.4) entsteht die q-Operatorgleichung zu *Continuous q-Hahn I*:

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (e^{-2i\phi}z^2-q)(1-\alpha e^{i\phi}z)\left(1-\frac{z_1e^{i\phi}}{\alpha}z\right) \cdot \left(1-\frac{z_2e^{i\phi}}{\alpha}z\right)\left(1-\frac{z_3e^{i\phi}}{\alpha}z\right),$$
$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = (e^{-2i\phi}qz^2-1)\left(1-\frac{e^{i\phi}}{\alpha}z\right)\frac{1}{\alpha^2}(z_1-\alpha e^{i\phi}z) \cdot (z_2-\alpha e^{i\phi}z)(z_3-\alpha e^{i\phi}z);$$
$$\text{Störglied}: \ (e^{2i\phi}z^2-q)(e^{2i\phi}z^2-1)(e^{2i\phi}qz^2-1)(q^{-n}-1) \cdot \left(1-\frac{z_1z_2z_3}{\alpha^2}q^{n-1}\right).$$

30) Aus dem zweiten Fall von (5.4) entsteht die q-Operatorgleichung zu *Continuous q-Hahn II* (nicht im Report):

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (e^{-2i\phi}z^2 - q)(1-\alpha e^{i\phi}z)\left(1-\frac{z_1 e^{i\phi}}{\alpha}z\right)\left(1-\frac{z_2 e^{i\phi}}{\alpha}z\right),$$

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = -(e^{-2i\phi}qz^2 - 1)\left(1-\frac{e^{i\phi}}{\alpha}z\right)\frac{e^{i\phi}}{\alpha}z(z_1-\alpha e^{i\phi}z)(z_2-\alpha e^{i\phi}z);$$

$$\text{Störglied:}\ \ (e^{2i\phi}z^2-q)(e^{2i\phi}z^2-1)(e^{2i\phi}qz^2-1)(q^{-n}-1).$$

31) Aus dem dritten Fall von (5.4) entsteht die q-Operatorgleichung zu *q-Meixner Pollaczek*:

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (e^{-2i\phi}z^2 - q)(1-\alpha e^{i\phi}z)\left(1-\frac{z_1 e^{i\phi}}{\alpha}z\right),$$

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = (e^{-2i\phi}qz^2 - 1)\left(1-\frac{e^{i\phi}}{\alpha}z\right)e^{2i\phi}z^2(z_1-\alpha e^{i\phi}z);$$

Störglied wie in (30).

32) Aus dem vierten Fall von (5.4) entsteht die q-Operatorgleichung zu *Continuous big q-Hermite II* (nicht im Report):

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{C}(z) = (e^{-2i\phi}z^2 - q)(1-\alpha e^{i\phi}z),$$

$$\frac{z^2}{a^2}\hat{D}(z) = -(e^{-2i\phi}qz^2 - 1)\left(1-\frac{e^{i\phi}}{\alpha}z\right)\alpha e^{3i\phi}z^3;$$

Störglied wie in (30).

6. Explizite Gestalt der Polynomlösungen in $q^{-x}+uq^x (x, u \in \mathbb{R};\quad q \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Nach dem Einsetzen von $C^*(x)$ aus (4.10) in (4.7) und Berücksichtigung von (4.9) entsteht

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(q^{-x};q)_{k-1}(uq^x;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}\{vq^{k-1}+w[(1-u)(1-q^{k-1}) + (1-q^{-x})(1-uq^x)]\}a_{n,k}$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{(q^{-x+1};q)_{k-2}(uq^{x+1};q)_{k-2}}{(q;q)_{k-2}}\{\sigma+\tau(1-q^{-x+1})(1-uq^{x+1})\}$$
$$\cdot(1-q^{-x})(1-uq^x)a_{n,k} = \lambda_n q\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-x};q)_k(uq^x;q)_k}{(q;q)_k}a_{n,k}.$$

Daraus ergibt sich durch Übergang auf zwei Summen:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-x};q)_k(uq^x;q)_k}{(q;q)_k}\left\{\frac{1-q^k}{q^{k-1}}[w+\tau q(1-q^{k-1})]-\lambda_n q\right\}a_{n,k}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-x};q)_k(uq^x;q)_k}{(q;q)_k}$$
$$\cdot\left\{vq^k-\frac{(1-q^k)^2}{q^k}w+(1-q^k)\sigma\right.$$
$$\left.+\frac{(1-q^{k-1})(1-q^k)(uq^{k+1}-1)}{q^{k-1}}\tau\right\}a_{n,k+1}=0,$$

wenn $a_{n,\,n+1}=0$ gesetzt wird. Für $k=n$ entstehen wieder die Eigenwerte λ_n aus (4.14). Durch "Koeffizientenvergleich" bei $(q^{-x};q)_k$ $(uq^x;q)_k$ erhält man für die $a_{n,k}$ die *zweigliedrige Rekursionsformel*

$$\{w(q^{-k}-q^{-n})+\tau q[q^{-k}(1+q^{2k-1})-q^{-n}(1+q^{2n-1})]\}q^{k-1}a_{n,k}$$
$$=\{-vq^{2k}+[(1-q^k)w-q^k\sigma+q(1-q^{k-1})(1-uq^{k-1})\tau]$$
$$\cdot(1-q^k)\}a_{n,k+1}\quad(k=n-1,n-2,\dots,1,0;\ a_{n,n+1}\neq 0).\tag{6.1}$$

Für die Differenz der Eigenwerte aus (4.14) ergibt sich

$$\lambda_n-\lambda_m=(q^{-n}-q^{-m})(w+\tau q)+\tau(q^n-q^m).\tag{6.2}$$

Mit der Verschiedenheit der Eigenwerte λ_n und λ_m für $n,m=0,1,2,\dots(n\neq m)$ ist auch der Koeffizient von $a_{n,k}$ in (6.1) von null verschieden. Dann können aus der zweigliedrigen Rekursionsformel (6.1) alle $a_{n,k}(k=n-1,n-2,\dots,1,0)$ eindeutig in Abhängigkeit von $a_{n,n}(\neq 0)$ bestimmt werden.

In den vier Fällen aus dem 4. Abschnitt ergeben sich aus (6.1) folgende *zweigliedrige Rekursionen*:

a) $$q(1-q^{k-n})\left(1-\frac{x_1x_2x_3}{u}q^{n+k-1}\right)a_{n,k}$$
$$=(1-x_1q^k)(1-x_2q^k)(1-x_3q^k)a_{n,k+1};\tag{6.3}$$

b.1) $$q(1-q^{k-n})a_{n,k}=(1-x_1q^k)(1-x_2q^k)a_{n,k+1};\tag{6.4}$$

b.2) $$q(1-q^{k-n})a_{n,k}=(1-x_1q^k)a_{n,k+1};\tag{6.5}$$

b.3) $$q(1-q^{k-n})a_{n,k}=a_{n,k+1}\quad(k=n-1,n-2,\dots,1,0;\ a_{n,n}\neq 0).\tag{6.6}$$

Verwendet man aus der q-Theorie ([1]) die Darstellung

$$
\begin{aligned}
&{}_r\Phi_s\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{matrix}\,\middle|\, q; z\right) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \dots (a_r;q)_k q^{(s-r+1)\binom{k}{2}} z^k}{(b_1;q)_k \dots (b_s;q)_k (-1)^{(s-r+1)k} (q;q)_k}, \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

dann entsteht bei a) durch die zweigliedrige Rekursion (6.3) aus dem Ansatz (4.1)

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-x};q)_k (uq^x;q)_k (q^{-n};q)_k \left(\frac{x_1x_2x_3}{u} q^{n-1};q\right)_k q^k}{(x_1;q)_k (x_2;q)_k (x_3;q)_k (q;q)_k} \\
&\quad \cdot \frac{(x_1;q)_n (x_2;q)_n (x_3;q)_n a_{n,n}}{(q^{-n};q)_n \left(\frac{x_1x_2x_3}{u} q^{n-1};q\right)_n q^n} \\
&= {}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} q^{-x}, uq^x, q^{-n}, \frac{x_1x_2x_3}{u} q^{n-1} \\ x_1, x_2, x_3 \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right), \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

wenn $a_{n,n}$ entsprechend gewählt wird. Es handelt sich dabei um die Polynome *q-Racah* (18) $(u \neq 0)$.

Bei b.1) entsteht durch die zweigliedrige Rekursion (6.4) aus dem Ansatz (4.1)

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-x};q)_k (uq^x;q)_k (q^{-n};q)_k q^k (x_1;q)_n (x_2;q)_n}{(x_1;q)_k (x_2;q)_k (q;q)_k (q^{-n};q)_n q^n} a_{n,n} \\
&= {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} q^{-x}, uq^x, q^{-n} \\ x_1, x_2 \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right), \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

wenn $a_{n,n}$ entsprechend gewählt wird. Es handelt sich dabei um die Polynome *Dual q-Hahn* (20).

Bei b.2) entsteht durch die zweigliedrige Rekursion (6.5) aus dem Ansatz (4.1)

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-x};q)_k (uq^x;q)_k (q^{-n};q)_k q^k (x_1;q)_n}{(x_1;q)_k (q;q)_k (q^{-n};q)_n q^n} a_{n,n} \\
&= {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} q^{-x}, uq^x, q^{-n} \\ x_1, 0 \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right), \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

wenn $a_{n,n}$ entsprechend gewählt wird. Es handelt sich dabei um die Polynome *Dual q-Krawtchouk* (21)

Bei b.3) entsteht durch die zweigliedrige Rekursion (6.6) aus dem Ansatz (4.1)

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-x};q)_k (uq^x;q)_k (q^{-n};q)_k q^k}{(q;q)_k (q^{-n};q)_n q^n} a_{n,n}$$
$$= {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} q^{-x}, uq^x, q^{-n} \\ 0, 0 \end{matrix} \middle| q; q \right), \tag{6.11}$$

wenn $a_{n,n}$ entsprechend gewählt wird. Es handelt sich dabei um die Polynome *Dual q-Charlier II* (22) (nicht im Report).

7. Explizite Gestalt der Polynomlösungen in $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a}$ $(a, u, z \in \mathbb{C})$

Die Überlegungen aus dem 6. Abschnitt lassen sich wieder auf diesen Fall übertragen, wobei q^x durch $\frac{z}{a}$ und uq^x durch $\bar{a}z$ zu ersetzen ist. Insbesondere bleiben die *zweigliedrigen Rekursionen* (6.3)–(6.6) gültig (an die Stelle von x_1, x_2, x_3 treten z_1, z_2, z_3). Aus diesen Rekursionen geht hervor, daß bei reellen z_1, z_2, z_3 und bei entsprechender Wahl von $a_{n,n}$ *reelle Polynome* in $\frac{a}{z} + \bar{a}z(u = a\bar{a};\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ entstehen.

I) Zuerst wird a *reell* $(\phi = 0, z = e^{i\theta})$ betrachtet.

23) Mit $z_1 = ab$, $z_2 = ac$, $z_3 = ad(z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R})$ entsteht analog zu (6.8) die explizite Form der Polynome *Askey-Wilson*

$$y_n^*(\cos\theta) = \frac{(ab;q)_n (ac;q)_n (ad;q)_n\, a_{n,n}}{(q^{-n};q)_n (abcdq^{n-1};q)_n\, q^n}$$
$$\cdot {}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} ae^{-i\theta}, ae^{i\theta}, q^{-n}, abcdq^{n-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix} \middle| q; q \right). \tag{7.1}$$

24) Mit $z_1 = ab$, $z_2 = ac(z_1, z_2 \in \mathbb{R})$ entsteht analog zu (6.9) die explizite Form der Polynome *Continuous dual q-Hahn*

$$y_n^*(\cos\theta) = \frac{(ab;q)_n (ac;q)_n}{(q^{-n};q)_n\, q^n} a_{n,n}\ {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} ae^{-i\theta}, ae^{i\theta}, q^{-n} \\ ab, ac \end{matrix} \middle| q; q \right). \tag{7.2}$$

25) Mit $z_1 = ab(z_1 \in \mathbb{R})$ entsteht analog zu (6.10) die explizite Form der Polynome *Al Salam-Chihara*

$$y_n^*(\cos\theta) = \frac{(ab;q)_n}{(q^{-n};q)_n\, q^n} a_{n,n}\ {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} ae^{-i\theta}, ae^{i\theta}, q^{-n} \\ ab, 0 \end{matrix} \middle| q; q \right). \tag{7.3}$$

Bemerkung. Die Polynome (7.1)–(7.3) bleiben reell, wenn unter den a, b, c, d *konjugiert komplexe* Parameter vorkommen.

26) Analog zu (6.11) entsteht die explizite Form der Polynome *Continuous big q-Hermite I*

$$y_n^*(\cos\theta) = \frac{a_{n,n}}{(q^{-n};q)_n\, q^n}\, {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} ae^{-i\theta}, ae^{i\theta}, q^{-n} \\ 0, 0 \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right). \tag{7.4}$$

II) $a = \alpha e^{-i\phi}$ wird *komplex* zugelassen $(z = e^{i\theta}, \alpha \in \mathbb{R})$.
29) Mit $z_1 = \alpha\beta$, $z_2 = \alpha\gamma$, $z_3 = \alpha\delta (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R})$ entsteht analog zu (6.8) die explizite Form der reellen Polynome *Continuous q-Hahn I*

$$\begin{aligned} y_n^*(\cos(\theta+\phi)) &= \frac{(\alpha\beta;q)_n(\alpha\gamma;q)_n(\alpha\delta;q)_n}{(2\alpha)^n(q^{-n};q)_n(\alpha\beta\gamma\delta q^{n-1};q)_n\, q^n}\, a_{n,n} \\ &\quad \cdot {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} \alpha e^{-i(\theta+\phi)}, \alpha e^{i(\theta+\phi)}, q^{-n}, \alpha\beta\gamma\delta q^{n-1} \\ \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right). \end{aligned} \tag{7.5}$$

30) Mit $z_1 = \alpha\beta$, $z_2 = \alpha\gamma (z_1, z_2 \in \mathbb{R})$ entsteht analog zu (6.9) die explizite Form der reellen Polynome *Continuous q-Hahn II* (im Report nicht enthalten)

$$\begin{aligned} y_n^*(\cos(\theta+\phi)) &= \frac{(\alpha\beta;q)_n(\alpha\gamma;q)_n}{(2\alpha)^n(q^{-n};q)_n\, q^n}\, a_{n,n} \\ &\quad \cdot {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} \alpha e^{-i(\theta+\phi)}, \alpha e^{i(\theta+\phi)}, q^{-n} \\ \alpha\beta, \alpha\gamma \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right). \end{aligned} \tag{7.6}$$

31) mit $z = \alpha\beta (z_1 \in \mathbb{R})$ entsteht analog zu (6.10) die explizite Form der reellen (auf zwei Parameter erweiterten) Polynome *q-Meixner Pollaczek*

$$\begin{aligned} y_n^*(\cos(\theta+\phi)) &= \frac{(\alpha\beta;q)_n a_{n,n}}{(2\alpha)^n(q^{-n};q)_n\, q^n} \cdot \\ &\quad \cdot {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} \alpha e^{-i(\theta+\phi)}, \alpha e^{i(\theta+\phi)}, q^{-n} \\ \alpha\beta, 0 \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Bemerkung. Die Polynome (7.5)–(7.7) bleiben *reell*, wenn unter den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *konjugiert komplexe* Parameter vorkommen.

32) Analog zu (6.11) entsteht die explizite Form der reellen Polynome *Continuous big q-Hermite II* (im Report nicht enthalten)

$$\begin{aligned} y_n^*(\cos(\theta+\phi)) &= \frac{a_{n,n}}{(2\alpha)^n(q^{-n};q)_n\, q^n} \\ &\quad \cdot {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} \alpha e^{-i(\theta+\phi)}, \alpha e^{i(\theta+\phi)}, q^{-n} \\ 0, 0 \end{matrix}\,\middle|\, q; q\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

8. Dreigliedrige Rekursionen für die Polynomlösungen in $q^{-x} + uq^x (x, u \in \mathbb{R}; q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Zur Gewinnung von dreigliedrigen Rekursionen bezüglich des Polynomgrades n läßt sich vorteilhaft die *Dualität* verwenden.

a) Die *q-Racahpolynome* aus (6.8) zeigen eine gewisse Symmetrie bezüglich x und n, aus der eine Dualität entsteht. Dazu setzt man einerseits $y_n(x) = \tilde{y}_n(\kappa_x)$ mit der *Eigenfunktion*

$$\kappa_x = (q^{-x} - 1)(1 - uq^x)$$

und betrachtet andererseits $z_n(x) = \tilde{z}_n(\lambda_x)$ mit der weiteren *Eigenfunktion*

$$\lambda_x = (q^{-x} - 1)\left(1 - \frac{x_1 x_2 x_3}{u} q^{n-1}\right).$$

Dann ist für die Polynome

$$\tilde{y}_n(\kappa_x) = {}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} q^{-x}, uq^x, q^{-n}, \frac{x_1x_2x_3}{u} q^{n-1} \\ x_1, x_2, x_3 \end{matrix} \middle| q; q\right) \quad (= y_n(x)) \tag{8.1}$$

und

$$\tilde{z}_n(\lambda_x) = {}_4\Phi_3\left(\begin{matrix} q^{-x}, \frac{x_1x_2x_3}{u} q^{x-1}, q^{-n}, uq^n \\ x_1, x_2, x_3 \end{matrix} \middle| q; q\right) \quad (= z_n(x)) \tag{8.2}$$

die Bedingung (2.2) mit $\tilde{y}_n(\kappa_m) = \tilde{z}_m(\lambda_n)$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ erfüllt. Wegen $\kappa_0 = \lambda_0 = 0$ ist außerdem $\tilde{y}_n(\kappa_0) = \tilde{z}_n(\lambda_0) = 1 (n = 0, 1, 2, \ldots)$, so daß auch die Bedingung (2.1) erfüllt ist. Nach der Definition 1 sind also die Polynomsysteme $\{\tilde{y}_n(\kappa_x)\}$ und $\{\tilde{z}_n(\lambda_x)\}$ bezüglich κ_x und λ_x *dual* (selbstverständlich muß neben $\lambda_n \neq \lambda_m$ aus (6.2) noch $\kappa_n \neq \kappa_m$ für die betrachteten $n \neq m$ erfüllt sein). Es ist naheliegend, die Polynome $\tilde{z}_n(\lambda_x)(= z_n(x))$ als *Duale q-Racahpolynome* (19) zu bezeichnen (nicht im Report).

Die q-Racahpolynome $y_n(x)$ aus (8.1) genügen nach (3.7) für $x = m$ der Gleichung

$$\begin{aligned} C(m)y_n(m+1) - \{C(m) + D(m)\}y_n(m) \\ + D(m)y_n(m-1) = r(m)\lambda_n y_n(m), \end{aligned}$$

aus der mit $y_n(m) = y_n(\kappa_m) = z_m(\lambda_n) = z_m(n)$ die Gleichung

$$C(m)z_{m+1}(n) - \{C(m) + D(m)\}z_m(n) + D(m)z_{m-1}(n) = r(m)\lambda_n z_m(n)$$

hervorgeht. Zieht man $C(m)$, $D(m)$ und $r(m)\lambda_n$ aus Satz 2 heran, dann ergibt sich für die *Dualen q-Racahpolynome* $z_n(x)$ neben

$$z_0(x) = 1, \quad z_1(x) = 1 - \frac{(1 - uq)\lambda_x}{(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)}$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$(uq^{2n-1} - 1)(1 - uq^n)(1 - x_1q^n)(1 - x_2q^n)(1 - x_3q^n)z_{n+1}(x)$$
$$= \left\{(uq^{2n-1} - 1)(uq^{2n} - 1)(uq^{2n+1} - 1)\lambda_x + (uq^{2n-1} - 1)\right.$$
$$\left.\ldots (1 - x_3q^n) + \frac{1}{uq}(uq^{2n+1} - 1)\ldots(x_3 - uq^n)\right\}z_n(x)$$
$$-\frac{1}{uq}(uq^{2n+1} - 1)(1 - q^n)(x_1 - uq^n)(x_2 - uq^n)$$
$$\cdot (x_3 - uq^n)z_{n-1}(x). \tag{8.3}$$

Der Vergleich von (8.2) mit (8.1) zeigt, daß bei Ersetzung von u durch $\frac{x_1x_2x_3}{uq}$ die $z_n(x)$ in die $y_n(x)$ übergehen. Auf diese Weise ergibt sich für die *q-Racahpolynome* $y_n(x)$ neben

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 - \frac{(u - x_1x_2x_3)\kappa_x}{u(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)}$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$u(x_1x_2x_3q^{2n-2} - u)(1 - x_1x_2x_3q^{n-1})(1 - x_1q^n)(1 - x_2q^n)$$
$$\cdot (1 - x_3q^n)y_{n+1}(x) = \{(x_1x_2x_3q^{2n-2} - u)(x_1x_2x_3q^{2n-1} - u)$$
$$\cdot (x_1x_2x_3q^{2n} - u)\kappa_x + u(x_1x_2x_3q^{2n-2} - u)$$
$$\ldots (1 - x_3q^n) + (x_1x_2x_3q^{2n} - u)$$
$$\ldots (u - x_2x_3q^{n-1}\}y_n(x) - (x_1x_2x_3q^{2n} - u)$$
$$\cdot (1 - q^n)(u - x_1x_2q^{n-1})(u - x_1x_3q^{n-1})$$
$$\cdot (u - x_2x_3q^{n-1})y_{n-1}(x). \tag{8.4}$$

Will man bezüglich der Potenzen von $q^{-x} + uq^x$ *monische Polynome* $y_n^{\mathrm{mon}}(x)$, dann ist das mit Hilfe von

$$y_n(x) = \frac{\left(\frac{x_1x_2x_3}{u}q^{n-1}; q\right)_n}{(x_1; q)_n(x_2; q)_n(x_3; q;)_n} y_n^{\mathrm{mon}}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8.5}$$

erreichbar. Dann ergibt sich für die *monischen q-Racahpolynome* $y_n^{\mathrm{mon}}(x)$ neben

$$y_0^{\mathrm{mon}}(x) = 1,$$
$$y_1^{\mathrm{mon}}(x) = q^{-x} + uq^x - 1 - u + \frac{u(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)}{u - x_1x_2x_3}$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1}^{\text{mon}}(x) = \\
&\quad = \Big\{ q^{-x} + uq^{x} - 1 - u + \\
&\qquad + \frac{u(u - x_1x_2x_3q^{n-1})(1 - x_1q^n)(1 - x_2q^n)(1 - x_3q^n)}{(u - x_1x_2x_3q^{2n-1})(u - x_1x_2x_3q^{2n})} + \\
&\qquad + \frac{(1 - q^n)(u - x_1x_2q^{n-1})(u - x_1x_3q^{n-1})(u - x_2x_3q^{n-1})}{(u - x_1x_2x_3q^{2n-2})(u - x_1x_2x_3q^{2n-1})} \Big\} y_n^{\text{mon}}(x) - \\
&\quad - \frac{u(1 - q^n)(u - x_1x_2q^{n-1})(u - x_1x_3q^{n-1})(u - x_2x_3q^{n-1})(u - x_1x_2x_3q^{n-1})}{(u - x_1x_2x_3q^{2n-3})(u - x_1x_2x_3q^{2n-2})^2(u - x_1x_2x_3q^{2n-1})} \cdot \\
&\quad \cdot (1 - x_1q^{n-1})(1 - x_2q^{n-1})(1 - x_3q^{n-1}) y_{n-1}^{\text{mon}}(x). \qquad (8.6)
\end{aligned}
$$

Der (positive) Faktor beim $y_{n-1}^{\text{mon}}(x)$ stellt in der dreigliedrigen Rekursion das d_n dar. Nach dem *Satz von Favard* existieren genau dann *positiv definite Orthogonalitätsfunktionale* für die q-Racahpolynome, wenn die d_n positiv sind $(n = 1, 2, \ldots, N$ mit $N \in \mathbb{N}$ bzw. $N \to \infty)$. Eine entsprechende Vorzeichendiskussion und die Realisierung der zugehörigen Orthoganalitätsfunktionale soll (auch für die folgenden Fälle) andernorts erfolgen.

b.1) Für die *Dualen q-Hahnpolynome* $z_n(x)$ läßt sich über die *q-Hahnpolynome* $y_n(x)$ eine dreigliedrige Rekursion bezüglich n gewinnen. Die q-Hahnpolynome genügen nach [1] der q-Operatorgleichung

$$
\begin{aligned}
&(1 - x_1q^x)(1 - x_2q^x)y_n(x + 1) \\
&- \{(1 - x_1q^x)(1 - x_2q^x) + (1 - q^x)(u - x_1x_2q^{n-1})\}y_n(x) + (1 - q^x) \\
&\quad \cdot (u - x_1x_2x_3q^{x-1})y_n(x - 1) = (q^{-n} - 1)(1 - uq^n)y_n(x). \qquad (8.7)
\end{aligned}
$$

Wie bei a) entsteht daraus für die *Dualen q-Hahnpolynome* neben

$$
z_0(x) = 1, \quad z_1(x) = 1 - \frac{\lambda_x}{(1 - x_1)(1 - x_2)}
$$
$$
(\lambda_x = (q^{-x} - 1)(1 - uq^x))
$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$
\begin{aligned}
&(1 - x_1q^n)(1 - x_2q^n)z_{n+1}(x) \\
&\quad = \{\lambda_x + (1 - x_1q^n)(1 - x_2q^n) + (1 - q^n)(u - x_1x_2q^{n-1})\}z_n(x) \\
&\qquad - (1 - q^n)(u - x_1x_2q^{n-1})z_{n-1}(x). \qquad (8.8)
\end{aligned}
$$

Will man bezüglich der Potenzen von $q^{-x} + uq^x$ *monische Polynome* $z_n^{\mathrm{mon}}(x)$, dann ist das mit Hilfe von

$$z_n(x) = \frac{z_n^{\mathrm{mon}}(x)}{(x_1;q)_n (x_2;q)_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8.9}$$

erreichbar. Dann ergibt sich für die *monischen Dualen q-Hahnpolynome* $z_n^{\mathrm{mon}}(x)$ neben

$$z_0^{\mathrm{mon}}(x) = 1, \quad z_1^{\mathrm{mon}}(x) = q^{-x} + uq^x + x_1x_2 - x_1 - x_2 - u$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned} z_{n+1}^{\mathrm{mon}}(x) = \{&q^{-x} + uq^x - q^n(u + x_1 + x_2) + x_1x_2q^{n-1} \\ &\cdot (q^{n+1} + q^n - 1)\} z_n^{\mathrm{mon}}(x) - (1 - q^n)(u - x_1x_2q^{n-1}) \\ &\cdot (1 - x_1q^{n-1})(1 - x_2q^{n-1}) z_{n-1}^{\mathrm{mon}}(x). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Der (positive) Faktor beim $z_{n-1}^{\mathrm{mon}}(x)$ liefert das d_n, bei dessen Positivität positiv definite Orthogonalitätsfunktionale existieren.

b.2) Für die *Dualen q-Krawtchoukpolynome* $z_n(x)$ läßt sich über die *q-Krawtchoukpolynome* $y_n(x)$ eine dreigliedrige Rekursion bezüglich n gewinnen. Die q-Krawtchoukpolynome genügen nach [1] der q-Operatorgleichung

$$\begin{aligned} &(1 - x_1q^x)y_n(x+1) - \{1 - x_1q^x + u(1 - q^x)\}y_n(x) \\ &\quad + u(1 - q^x)y_{n-1}(x) = (q^{-n} - 1)(1 - uq^n)y_n(x). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Wie bei a) entsteht daraus für die *Dualen q-Krawtchoukpolynome* $z_n^{\mathrm{mon}}(x)$ neben

$$z_0(x) = 1, \quad z_1(x) = 1 - \frac{\lambda_x}{1 - x_1} \quad (\lambda_x = (q^{-x} - 1)(1 - uq^x))$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned} (1 - x_1q^n)z_{n+1}(x) = \{&q^{-x} + uq^x - q^n(u + x_1)\}z_n(x) \\ &- u(1 - q^n)z_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{8.12}$$

Will man bezüglich der Potenzen von $q^{-x} + uq^x$ *monische Polynome* $z_n^{\mathrm{mon}}(x)$, dann ist das mit Hilfe von

$$z_n(x) = \frac{1}{(x_1;q)_n} z_n^{\mathrm{mon}}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8.13}$$

erreichbar. Dann ergibt sich für die *monischen Dualen q-Krawtchoukpolynome* $z_n^{\text{mon}}(x)$ neben

$$z_0^{\text{mon}}(x) = 1, \quad z_1^{\text{mon}}(x) = q^{-x} + uq^x - x_1 - u$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich n

$$\begin{aligned} z_{n+1}^{\text{mon}}(x) = \{q^{-x} + uq^x - q^n(u + x_1)\} z_n^{\text{mon}}(x) \\ - u(1-q^n)(1 - x_1 q^{n-1}) z_{n-1}^{\text{mon}}(x). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Der (positive) Faktor beim $z_{n-1}^{\text{mon}}(x)$ liefert das d_n, bei dessen Positivität positiv definite Orthogonalitätsfunktionale existieren.

b.3) Für die Polynome *Dual q-Charlier II* $z_n(x)$ läßt sich über die Polynome *q-Charlier II* $y_n(x)$ eine dreigliedrige Rekursion bezüglich n gewinnen. Mit Hilfe von (6.11) findet man die q-Operatorgleichung

$$\begin{aligned} &y_{n+1}(x) - \{1 + u(1-q^x)\} y_n(x) + u(1-q^x) y_{n-1}(x) \\ &\quad = (q^{-n} - 1)(1 - uq^n) y_n(x); \end{aligned} \tag{8.15}$$

wie bei a) entsteht daraus für die Polynome *Dual q-Charlier II* neben

$$z_0(x) = 1, \quad z_1(x) = q^{-x} + uq^x - u$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$z_{n+1}(x) = \{q^{-x} + uq^x - uq^n\} z_n(x) - u(1-q^n) z_{n-1}(x). \tag{8.16}$$

Die Polynome $z_n(x)$ sind bereits monisch bezüglich der Potenz von $q^{-x} + uq^x$. Hier ist $d_n = u(1-q^n)$, bei dessen Positivität positiv definite Orthogonalitätsfunktionale existieren.

9. Dreigliedrige Rekursionen für die Polynomlösungen in $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a}$ $(a, u, z \in \mathbb{C})$

Die Überlegungen aus dem 8. Abschnitt lassen sich auch hier verwenden, wenn q^x durch $\frac{z}{a}$ und uq^x durch $\overline{a}z$ $(u = a \cdot \overline{a})$ ersetzt wird (an die Stelle von x_1, x_2, x_3 treten z_1, z_2, z_3).

I) Zuerst wird a *reell* $(\phi = 0, z = e^{i\theta})$ betrachtet.

23) Mit $z_1 = ab$, $z_2 = ac$, $z_3 = ad$ $(z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R})$ entsteht aus (8.6) für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos\theta)$ von *Askey-Wilson* neben

$$\begin{aligned} &\hat{y}_0(\cos\theta) = 1, \\ &\hat{y}_1(\cos\theta) = \cos\theta - \frac{1}{2(1-abcd)} \\ &\qquad\qquad \cdot \{a + b + c + d - abc - abd - acd - bcd\} \end{aligned}$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned}
&\hat{y}_{n+1}(\cos\theta)\\
&\quad= \Bigg\{\cos\theta - \frac{1}{2}\Bigg[a + \frac{1}{a} - \frac{(1-abcdq^{n-1})(1-abq^{n})(1-acq^{n})(1-adq^{n})}{a(1-abcdq^{2n-1})(1-abcdq^{2n})}\\
&\qquad - \frac{a(1-q^{n})(1-bcq^{n-1})(1-bdq^{n-1})(1-cdq^{n-1})}{(1-abcdq^{2n-2})(1-abcdq^{2n-1})}\Bigg]\Bigg\}\hat{y}_{n}(\cos\theta)\\
&\quad - \frac{(1-q^{n})(1-abcdq^{n-1})(1-abq^{n-1})(1-acq^{n-1})(1-adq^{n-1})(1-bcq^{n-1})}{4(1-abcdq^{2n-3})(1-abcdq^{2n-2})^{2}(1-abcdq^{2n-1})}\\
&\qquad \cdot (1-bdq^{n-1})(1-cdq^{n-1})\hat{y}_{n-1}(\cos\theta). \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

Bemerkungen. Die Polynome von *Continuous q-Jacobi* (27) stellen einen Spezialfall der Polynome von *Askey-Wilson* (23) dar.

Die Polynome von *Continuous q-Laguerre* (28) gehen aus den Polynomen von *Continuous q-Jacobi* (27) hervor (ein Parameter läuft gegen ∞).

24) Mit $z_1 = ab,\ z_2 = ac (z_1, z_2 \in \mathbb{R})$ entsteht aus (8.10) für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos\theta)$ von *Continuous dual q-Hahn* neben

$$\hat{y}_0(\cos\theta) = 1, \quad \hat{y}_1(\cos\theta) = \cos\theta - \frac{1}{2}(a + b + c - abc)$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{n+1}(\cos\theta) = &\left\{\cos\theta - \frac{q^{n}}{2}(a+b+c) + \frac{abc}{2}q^{n-1}(q^{n+1} + q^{n} - 1)\right\}\\
&\cdot \hat{y}_{n}(\cos\theta) - \frac{1}{4}(1-q^{n})(1-abq^{n-1})(1-acq^{n-1})\\
&\cdot (1-bcq^{n-1})\hat{y}_{n-1}(\cos\theta). \qquad (9.2)
\end{aligned}$$

25) Mit $z_1 = ab (z_1 \in \mathbb{R})$ entsteht aus (8.14) für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos\theta)$ von *Al Salam-Chihara* neben

$$\hat{y}_0(\cos\theta) = 1, \quad \hat{y}_1(\cos\theta) = \cos\theta - \frac{a+b}{2}$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{n+1}(\cos\theta) = &\left\{\cos\theta - \frac{aq^{n}}{2}(a+b)\right\}\hat{y}_{n}(\cos\theta)\\
&- \frac{1}{4}(1-q^{n})(1-abq^{n-1})\hat{y}_{n-1}(\cos\theta). \qquad (9.3)
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Rekursionen (9.1)–(9.3) bleiben bestehen, wenn unter den a, b, c, d *konjugiert komplexe* Parameter vorkommen.

26) Für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos\theta)$ von *Continuous big q-Hermite I* entsteht aus (8.16) neben $\hat{y}_0(\cos\theta) = 1$ und $\hat{y}_1(\cos\theta) = \cos\theta - \frac{a}{2}$ die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\hat{y}_{n+1}(\cos\theta) = \left\{\cos\theta - \frac{aq^n}{2}\right\}\hat{y}_n(\cos\theta) - \frac{1}{4}(1-q^n)\hat{y}_{n-1}(\cos\theta). \tag{9.4}$$

Bemerkung. Die Polynome von *Continuous q-Hermite* (33) genügen der *dreigliedrigen Rekursion* (9.4) mit $a=0$ (symmetrische Polynome).

II) $a = \alpha e^{-i\phi}$ wird *komplex* zugelassen $(z = e^{i\theta}, \alpha \in \mathbb{R})$.

29) Mit $z_1 = \alpha\beta,\ z_2 = \alpha\gamma,\ z_3 = \alpha\delta(z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R})$ entsteht aus (8.6) für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos(\theta+\phi))$ von *Continuous q-Hahn I* neben

$$\begin{aligned}\hat{y}_0(\cos(\theta+\phi)) = 1, \quad \hat{y}_1(\cos(\theta+\phi)) &= \cos(\theta+\phi) - \frac{1}{2(1-\alpha\beta\gamma\delta)}\\ &\cdot\{\alpha+\beta+\gamma+\delta-\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta\}\end{aligned}$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned}&\hat{y}_{n+1}(\cos(\theta+\phi))\\ &\quad= \Bigg\{\cos(\theta+\phi) - \frac{1}{2}\Bigg[\alpha - \frac{1}{\alpha}\\ &\qquad - \frac{(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{n-1})(1-\alpha\beta q^n)(1-\alpha\gamma q^n)(1-\alpha\delta q^n)}{(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{2n-1})(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{2n})}\\ &\qquad - \frac{\alpha(1-q^n)(1-\beta\gamma q^{n-1})(1-\beta\delta q^{n-1})(1-\gamma\delta q^{n-1})}{(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{2n-2})(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{2n-1})}\Bigg]\Bigg\}\\ &\qquad\cdot\hat{y}_n(\cos(\theta+\phi))\\ &\qquad - (1-q^n)((1-\alpha\beta\gamma\delta q^{n-1})(1-\alpha\beta q^{n-1})(1-\alpha\gamma q^{n-1})\\ &\qquad\quad\cdot(1-\alpha\delta q^{n-1})(1-\beta\gamma q^{n-1})(1-\beta\delta q^{n-1}))\\ &\qquad\quad\cdot(1-\gamma\delta q^{n-1})\hat{y}_{n-1}(\cos(\theta+\phi))/4(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{2n-3})\\ &\qquad\quad\cdot(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{2n-2})^2(1-\alpha\beta\gamma\delta q^{2n-1}).\end{aligned} \tag{9.5}$$

30) Mit $z_1 = \alpha\beta,\ z_2 = \alpha\gamma(z_1, z_2 \in R)$ entsteht aus (8.10) für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos(\theta+\phi))$ von *Continuous q-Hahn II*

neben

$$\hat{y}_0(\cos(\theta+\phi)) = 1, \quad \hat{y}_1(\cos(\theta+\phi)) = \cos(\theta+\phi) - \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma)$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{n+1}(\cos(\theta+\phi)) = {} & \Big\{\cos(\theta+\phi) - \frac{q^n}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \\ & + \frac{\alpha\beta\gamma}{2}q^{n-1}(q^{n+1}+q^n-1)\Big\} \\ & \cdot \hat{y}_n(\cos(\theta+\phi)) - \frac{1}{4}(1-q^n)(1-\alpha\beta q^{n-1}) \\ & \cdot (1-\alpha\gamma q^{n-1})(1-\beta\gamma q^{n-1})\hat{y}_{n-1}(\cos(\theta+\phi)).\end{aligned} \tag{9.6}$$

31) Mit $z_1 = \alpha\beta(z_1 \in \mathbb{R})$ entsteht aus (9.14) für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos(\theta+\phi))$ von *q-Meixner-Pollaczek* neben

$$\hat{y}_0(\cos(\theta+\phi)) = 1, \quad \hat{y}_1(\cos(\theta+\phi)) = \cos(\theta+\phi) - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{n+1}(\cos(\theta+\phi)) = {} & \Big\{\cos(\theta+\phi) - \frac{\alpha+\beta}{2}q^n\Big\}\hat{y}_n(\cos(\theta+\phi)) \\ & - \frac{1}{4}(1-q^n)(1-\alpha\beta q^{n-1})\hat{y}_{n-1}(\cos(\theta+\phi)).\end{aligned} \tag{9.7}$$

Bemerkung. Die Rekursionen (9.5)–(9.7) bleiben bestehen, wenn unter den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *konjugiert komplexe* Parameter vorkommen.

32) Für die (monischen) Polynome $\hat{y}_n(\cos(\theta+\phi))$ von *Continuous big q-Hermite II* entsteht aus (8.16) neben $\hat{y}_0(\cos(\theta+\phi)) = 1$ und $\hat{y}_1(\cos(\theta+\phi)) - \frac{\alpha}{2}$ die *dreigliedrige Rekursion* bezüglich $n(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{n+1}(\cos(\theta+\phi)) = {} & \Big\{(\cos(\theta+\phi)) - \frac{\alpha}{2}q^n\Big\}\hat{y}_n(\cos(\theta+\phi)) \\ & - \frac{1}{4}(1-q^n)\hat{y}_{n-1}(\cos(\theta+\phi)).\end{aligned} \tag{9.8}$$

In allen Fällen aus diesem Abschnitt ist die Positivität des Faktors beim $-\hat{y}_{n-1}$ für die Existenz eines positiv definiten Orthogonalitätsfunktionals entscheidend.

Zusammenfassung

Von den 34 Polynomtypen aus der Einleitung wurden die 5 Typen in $q^{-x} + uq^x$ (III) und die 10 Typen in $\frac{a}{z} + \frac{uz}{a}$ (IV) durch eine q-Operatorgleichung abgedeckt (dargestellt in (4.26) bzw. (5.4)). Außerdem wurden die Polynome von Continuous q-Hermite (33) mit (26) erledigt. Die weiteren 18 Polynomtypen und eventuell zusätzliche Typen, die komplexen q-Operatorgleichungen genügen, müssen noch geordnet werden.

Literatur

[1] Koekoek, R., Swarttouw, R.F.: The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. Report, Delft University of Technology, 1998.

[2] Leonhard, D.A.: Orthogonal polynomials duality and association schemes. SIAM Math. An. **13**, 656–663 (1982).

[3] Lesky, P.A.: Racahpolynome und duale Hahnpolynome als Lösungen von Eigenwertproblemen. Sb. Öst. Ak. Wiss., math. nat. Kl. **202**, 163–172 (1993).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Peter A. Lesky, Math. Inst. der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, D-70569 Stuttgart.